5.4 Formule des compléments

Référence : E. Amar, E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

Leçons concernées : 235, 236, 239, 245.

Théorème 1. *La fonction* Γ *définie par*

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

vérifie

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\} \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. D'après le théorème de prolongement analytique, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$. Soit alors $\alpha \in]0,1[$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, si $U = \{(t,s) \in \mathbb{R}^d \mid s > 0, t > 0\}$,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s}\, ds \\ &= \int_U t^{\alpha-1} s^{-\alpha} e^{-t-s}\, dt\, ds = \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} e^{-(t+s)}\, ds\, \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

On réalise alors le changement de variables $\varphi : (t,s) \mapsto (u,v) = \left(s+t, \dfrac{s}{t}\right)$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur U d'inverse $\varphi^{-1}(u,v) = \left(\dfrac{u}{1+v}, \dfrac{uv}{1+v}\right)$. Le jabobien de φ en (t,s) est :

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{t} + \frac{s}{t^2} = \frac{1}{t} + \frac{v}{t} = \frac{1+v}{t}.$$

On a donc, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_U v^{-\alpha} e^{-u} \frac{du\, dv}{1+v} = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{\alpha}(1+v)} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{\alpha}(1+v)}$$

et on conclut à l'aide du lemme suivant. □

Lemme 2. *Pour tout* $\alpha \in]0,1[$*, on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in]0,1[$. On note $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ dont on remarque qu'elle est bien définie comme l'intégrale de la fonction $u(t) = \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ positive. On a de plus $I_\alpha < +\infty$ puisque u est continue sur $]0,+\infty[$, et que $u(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable en 0 et $u(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrable en $+\infty$.

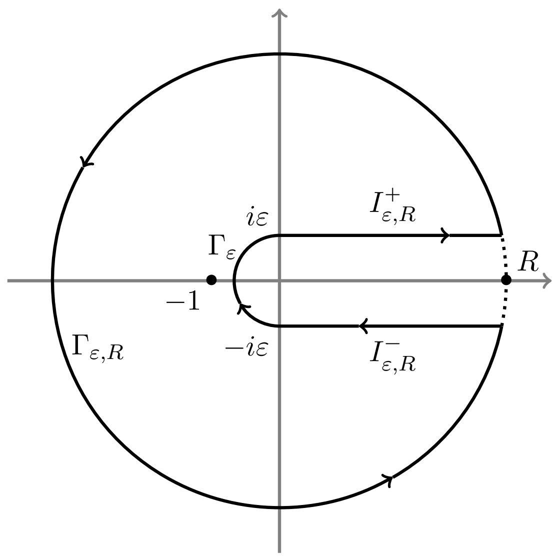
On considère alors $\Omega = \mathbb{C}\backslash[0,+\infty[$ et la fonction f définie sur $\Omega\backslash\{-1\}$ par

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$$

où l'on convient que $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$. La fonction f est holomorphe sur $\Omega\backslash\{-1\}$ avec un pôle simple en -1 de résidu

$$\mathrm{res}(f,-1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}.$$

Pour $R > 1$ et $0 < \varepsilon < 1$ on définit alors le chemin orienté $I^-_{\varepsilon,R} \cup \Gamma_\varepsilon \cup I^+_{\varepsilon,R} \gamma_{\varepsilon,R} = \Gamma_{\varepsilon,R} \cup$ où $I^-_{\varepsilon,R} = [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$, $\Gamma_\varepsilon = \{e^{i\theta} \mid \pi/2 < \theta < 3\pi/2\}$, $I^+_{\varepsilon,R} = [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$ et $\Gamma_{\varepsilon,R} = \{Re^{i\theta} \mid \theta \in [-\pi,\pi], |\theta| > \theta_{\varepsilon,R}\}$ avec $\theta_{\varepsilon,R} = \arctan(\varepsilon/\sqrt{R^2-\varepsilon^2})$.



Puisque -1 est à l'intérieur de $\gamma_{\varepsilon,R}$, le théorème des résidus donne

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

- Sur Γ_ε, on a

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1+\varepsilon)} \times \pi\varepsilon = \frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1+\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

- sur $\Gamma_{\varepsilon,R}$, on a

$$\left|\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz\right| \leqslant \frac{1}{R^\alpha(1+R)} \times (2\pi R - 2\theta_{\varepsilon,R}) \leqslant \frac{2\pi R^{1-\alpha}}{1+R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

- sur $I^+_{\varepsilon,R}$, on a

$$\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(i\varepsilon+t)dt = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{dt}{(i\varepsilon+t)^\alpha(1+i\varepsilon+t)}$$

  or $(i\varepsilon+t)^\alpha \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} t^\alpha$. Ainsi, avec

  · $\mathbb{1}_{]0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]} f(i\varepsilon+t) \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{]0,R]}\frac{1}{t^\alpha(1+t)}$

  · $\left|\mathbb{1}_{]0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]} f(i\varepsilon+t)\right| \leqslant \mathbb{1}_{]0,R]}\frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ intégrable,

  on obtient par convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

  et donc

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)dz = I_\alpha.$$

- De la même manière, puisque $(-i\varepsilon+t)^\alpha \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} e^{2i\pi\alpha}t^\alpha$, on a par convergence dominée

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)dz = e^{-2i\pi\alpha}I_\alpha.$$

On conclut : d'après l'orientation du chemin, on a $(1-e^{-2i\pi\alpha})I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$ et donc

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

$\square$

Commentaire : pour justifier le recasage dans la leçon 235 : interversion de limites et d'intégrales, on note qu'on applique deux fois le théorème de Fubini-Tonelli ainsi que deux fois le théorème de convergence dominée.