## 3.7 Fonction caractéristique et moments

**Référence :** J.Y. Ouvrard, *Probabilités 2*, Cassini, 2009.

**Leçons concernées :** 218, 228, 239, 260, 216.

**Théorème 1.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle et $\varphi_X$ sa fonction caractéristique. Alors,*

*(i) si $X$ admet un moment d'ordre $n$, $\varphi_X$ est de classe $\mathcal{C}^n$, et pour tout $k \in [|1, n|]$, $\forall t \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX) d\mathbb{P}.$$

*En particulier,*

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

*(ii) Réciproquement, si $\varphi_X$ est $n$ ($n \geqslant 2$) fois dérivable en $0$, alors $X$ admet des moments d'ordre $1 \leqslant k \leqslant 2[\frac{n}{2}]$ vérifiant*

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

*Démonstration.* (i) Le premier point résulte d'une simple application du théorème de dérivation sous l'intégrale : soit $1 \leqslant k \leqslant n$, $X$ admet un moment d'ordre $k$ puisqu'il en admet un d'ordre $n$ par hypothèse. D'autre part, on a

$$\frac{d^k}{dt^k} \exp(itX) = i^k X^k \exp(itX)$$

qui est majoré en module par $|X|^k$ qui est intégrable. On peut alors appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale itéré $k$ fois pour obtenir $\varphi_X$ de classe $\mathbb{C}^k$ et la formule

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX) d\mathbb{P}.$$

(ii) On montre le résultat par récurrence sur $1 \leqslant k \leqslant [\frac{n}{2}]$ : pour le cas $k = 1$, on cherche à montrer que $X$ admet un moment d'ordre $2k = 2$, et on écrit pour cela la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 de $\varphi_X$ pour $t$ et $-t$ :

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(0) + t\varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2)$$
$$\varphi_X(-t) = \varphi_X(0) - t\varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2).$$

Ainsi,

$$\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2 = t^2\varphi_X''(0) + o(t^2)$$

avec $\varphi_X(0) = 1$. c'est-à-dire que $\lim_{t\to 0} \dfrac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{t^2} = \varphi''_X(0)$. D'autre part, on sait que

$$\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) = 2\Re(\varphi_X(t)) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)].$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to 0} 2\mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\varphi''_X(0).$$

Enfin, on sait que $X^2 = 2\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(tX)}{t^2}$, ainsi, par le lemme de Fatou, si $t_n \to 0$,

$$\int_\Omega X^2 = 2\mathbb{E}\left[\liminf_n \frac{1-\cos(t_nX)}{t_n^2}\right] \leqslant 2\liminf_n \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(t_nX)}{t_n^2}\right] = -\varphi''_X(0) < +\infty.$$

On fixe alors $1 \leqslant k \leqslant [\frac{n}{2}]$ et on suppose avoir montré l'existence des moments jusqu'à l'ordre $2(k-1)$ et on cherche à montrer que $X$ admet un moment d'ordre $2k$ : on applique le même raisonnement que précédemment à $\varphi_X^{(2k-2)}$ dérivable deux fois pour obtenir :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_X^{(2k-2)}(t) + \varphi_X^{(2k-2)}(-t) - 2\varphi_X^{(2k-2)}(0)}{t^2} = \varphi_X^{(2k)}(0.)$$

D'autre part, par hypothèse de récurrence et par le point (i),

$$\begin{aligned} \varphi_X^{(2k-2)}(t) &= i^{2k-2}\mathbb{E}[X^{2k-2}\exp(itX)] \\ \varphi_X^{(2k-2)}(-t) &= i^{2k-2}\mathbb{E}[X^{2k-2}\exp(-itX)] \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi_X^{(2k-2)}(t) + \varphi_X^{(2k-2)}(-t) = (-1)^{k-1}2\mathbb{E}[X^{2k-2}\cos(tX)]$$

et d'autre part

$$\varphi_X^{(2k-2)}(0) = (-1)^{k-1}\mathbb{E}[X^{2k-2}].$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to 0} 2\mathbb{E}\left[X^{2k-2}\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = (-1)^k\varphi_X^{(2k)}(0)$$

et on conclut avec le lemme de Fatou de la même manière que ci-dessus.

□

**Application 2.** *Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors pour $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}\big[X^{2k}\big] = \frac{\sigma^{2k}(2k)!}{2^k k!} \quad et \quad \mathbb{E}\big[X^{2k+1}\big] = 0.$$

*Démonstration.* On sait que $\varphi_X(t) = e^{-t^2\sigma^2/2}$, et donc d'après le théorème, $X$ admet des moments de tout ordre. D'autre part, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2\sigma^2/2} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k \sigma^{2k}}{2^k k!} t^{2k}.$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^{(2k)}(0) = \frac{(-1)^k \sigma^{2k} (2k)!}{2^k k!} \quad \text{et} \quad \varphi^{(2k+1)}(0) = 0$$

d'où le résultat d'après le théorème. $\square$