2.4 Décomposition de Dunford

Référence : X. Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre*, Ellipses, 2009.

Leçons concernées : 153, 154, 155, 157.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f = d + n$, n soit nilpotent, d soit diagonalisable, et que $d \circ n = n \circ d$.*

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Lemme 2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $P = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en facteurs irréductibles et $N_i := \ker M_i^{\alpha_i}(f)$. Alors on a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.*

Démonstration. La première assertion résulte directement du lemme des noyaux.

Étape 1 : on note, pour tout i, $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$, qui sont premiers entre eux dans leur ensemble, et donc, d'après le théorème de Bézout, il existe $U_1, \ldots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U_1 Q_1 + \cdots + U_s Q_s = 1$ et donc

$$\mathrm{id}_E = U_1 \circ Q_1(f) + \cdots + U_s \circ Q_s(f).$$

On note alors $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(f)$ de sorte qu'on a $\mathrm{id}_E = \sum_{j=1}^{s} p_j$ $(*)$. On remarque que les p_i sont des polynômes en f. On commence par montrer que les p_i sont des projecteurs. Pour $j \neq i$, P divise $Q_i Q_j$ et donc

$$p_i \circ p_j = Q_i Q_j(f) \circ U_i U_j(f) = 0.$$

Ainsi, pour tout i, par $(*)$, $p_i = \sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j = p_i^2$.

Étape 2 : on montre ensuite par double inclusion que $\mathrm{Im}(p_i) = N_i$. Soit $y = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$. On a

$$M_i^{\alpha_i}(f)(y) = M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) = U_i(f) \circ P(f)(x) = 0$$

et donc $\mathrm{Im}(p_i) \subset \ker M_i^{\alpha_i}(f) = N_i$. Réciproquement, si $x \in N_i$, on a d'après $(*)$, $x = \sum_{j=1}^{s} p_j(x)$. Or pour $j \neq i$, $p_j(x) = U_j Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i}$ divise Q_j et donc $x = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$.

Étape 3 : on montre enfin par double inclusion que $\ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Soit $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i Q_i(f)(x) = 0$ car $M_j^{\alpha_j}$ divise Q_i et donc $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \ker(p_i)$. Réciproquement, si $x \in \ker(p_i)$, par $(*)$, $x = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Im}(p_j) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Cela conclut la preuve du lemme. □

Démonstration (Théorème). Existence : on applique le lemme précédent à $P = \chi_f = \beta \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $M_i = X - \lambda_i$. On reprend les notations du lemme et on pose $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ qui est alors diagonalisable (diagonale dans une base adaptée à la décomposition $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$). On pose également $n = f - d = \sum_{i=1}^{s}(f - \lambda_i)p_i$ grâce à $(*)$. On sait que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$, $p_i^2 = p_i$ et, puisque les p_i sont des polynômes en f, que les p_i et f commutent, ainsi, par récurrence, on obtient que pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$n^q = \sum_{i=1}^{s}(f - \lambda_i)^q p_i.$$

Or, si $q = \max_i \alpha_i$, pour tout i, $(f - \lambda_i)^q p_i(x) = \big((X - \lambda_i)^q P_i\big)(f)(x) = 0$ car χ_f divise $(X - \lambda_i)^q P_i$. Ainsi n est nilpotent et puisque ce sont des polynômes en f, d et n commutent, et on a l'existence.

Unicité : soit (d', n') un autre tel couple. Alors d' et n' commutent avec $d' + n' = f$ et donc avec d et n qui sont des polynômes en f. Ainsi, d et d' sont simultanément diagonalisables, et donc $d - d'$ est diagonalisable. Or on a $d - d' = n' - n$ qui est nilpotent par le binôme de Newton, puisque n et n' commutent. Ainsi $d = d'$ et donc $n = n'$. □