5 Développements non utilisés

5.1 Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Référence : E.M. Stein, M. Shakarchi, *Fourier analysis, an introduction*, Princeton University Press, 2003.[1]

Leçons concernées : 222, 239, 250.

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant*

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

(ii) $x \mapsto u(x,t)$ *tend uniformément vers f lorsque t tend vers 0, c'est-à-dire que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x,t) - f(x)| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

(iii) $x \mapsto u(x,t)$ *appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à t, c'est-à-dire que pour tout $T > 0$,*

$$\forall k,l \geqslant 0, \quad M_{k,l}^T := \sup_{0<t<T} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t) \right| < +\infty.$$

De plus la solution est donnée par $u(x,t) = (f * \mathcal{H}_t)(x)$ où

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : on suppose que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ est solution du problème. Puisque $u(.,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on peut considérer la transformée de Fourier partielle de u :

$$\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-ix\xi} dx.$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on applique alors le théorème de dérivation sous l'intégrale à $t \mapsto \widehat{u}(\xi,t)$ sur tout intervalle $]0,T[$, pour $T > 0$:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)e^{-ix\xi}$ est dérivable sur $]0,T[$

(ii) $\forall t \in]0,T[$, $x \mapsto u(x,t)e^{-ix\xi} \in L^1(\mathbb{R})$ puisque $u(.,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0,T[$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}\Big(u(x,t) e^{-ix\xi} \Big) \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right| \leqslant \frac{M_{0,2}^T + M_{2,2}^T}{1 + |x|^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de t.

1. Merci à Michel Nassif pour l'idée et l'aide sur certains points du développement.

On obtient ainsi, pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $t > 0$,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(u(x,t)e^{-ix\xi}\Big)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-ix\xi}dx.$$

En réalisant deux intégrations par parties on obtient alors pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $t > 0$,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 \widehat{u}(\xi, t)$$

et ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe $A(\xi) \in \mathbb{R}$ tel que pour $t > 0$,

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

Or on a, pour $\xi \in \mathbb{R}$, puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour tout $t > 0$,

$$\big|\widehat{u}(\xi, t) - \widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \big|u(x,t) - f(x)\big|dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et que pour $t \in]0,1[$, $|u(x,t)| \leqslant \frac{M^1_{0,0}+M^1_{2,0}}{1+|x|^2}$, il existe $A > 0$ tel que pour $t \in]0,1[$,

$$\int_{|x|>A} \big|u(x,t) - f(x)\big|dx \leqslant \int_{|x|>A} |u(x,t)|dx + \int_{|x|>A} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Ainsi, pour $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \big|u(x,t) - f(x)\big|dx &= \int_{|x|>A} \big|u(x,t) - f(x)\big|dx + \int_{|x|\leqslant A} \big|u(x,t) - f(x)\big|dx \\ &< \varepsilon + 2A \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t) - f(x)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \varepsilon\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (ii). Ainsi, en faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{u}(\xi, t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \widehat{f}(\xi)$, et donc $A = \widehat{f}$. On obtient alors $\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)e^{-\xi^2 t}$. Puisque pour tout $t > 0$, $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)e^{-\xi^2 t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inversion de Fourier pour avoir, pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{-\xi^2 t}e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-is\xi}ds\Big)e^{-\xi^2 t}e^{ix\xi}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 t}e^{-i(s-x)\xi}d\xi\Big)ds = \int_{\mathbb{R}} f(s)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x-s)^2/4t}ds = (f * \mathcal{H}_t)(x)\end{aligned}$$

par théorème de Fubini et par transformée de Fourier d'une gaussienne. On a donc unicité de la solution.

Synthèse : on considère $u(x,t) = (f * \mathcal{H}_t)(x)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. D'après l'analyse on sait que

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi$$

en appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient la régularité de u, qui est en fait $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ et le fait qu'elle vérifie l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

La convergence uniforme de $u(.,t)$ vers f provient quant à elle du fait que $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$ est une approximation de l'unité. En effet, il est clair que $\mathcal{H}_t$ est positive d'intégrale 1, et par changement de variable on obtient

$$\int_{|x|>\eta} \mathcal{H}_t(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|y|>\eta/\sqrt{4t}} e^{-y^2} dy \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Enfin, pour montrer le point (iii),

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leqslant \int_{|y| \leqslant |x|/2} |f(x-y)| \mathcal{H}_t(y)\, dy + \int_{|y|>|x|/2} |f(x-y)| \mathcal{H}_t(y)\, dy \\ &\leqslant \frac{C_N}{(1+|x|)^N} + C \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-cx^2/t} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $T > 0$,

$$\forall k \geqslant 0, \quad \sup_{0<t<T} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k u(x,t)| < +\infty.$$

On obtient la même chose pour les dérivées partielles de u par rapport à x en appliquant un théorème de dérivation sous l'intégrale et en utilisant le fait que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

Remarque. On peut raisonner de la même manière avec l'équation de Schrödinger, et c'est plus simple puisque dans ce cas la condition initiale est simplement la valeur de $u(.,t)$ en 0, puisque u est définie sur $\mathbb{R}^2$. On n'a donc pas besoin de justifier le passage à la limite dans la transformée de Fourier de u.

Commentaire : c'est sûrement trop long pour un développement, peut être préférer l'équation de Schrödinger qui manipule les mêmes outils mais est plus simple.