3.3 Équation de la chaleur sur le cercle

Références : H. Dym, H.P. McKean, *Fourier series and integrals*, Academic Press, 1972.[1]

Leçons concernées : 202, 209, 222, 235, 241, 246.

Théorème 1. *Il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{T})$ à l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\mathbb{T} \tag{1}$$

avec pour condition initiale

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} ||u-f||_\infty = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sup_{x\in\mathbb{T}} |u(t,x)-f(x)| = 0 \tag{2}$$

où $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$.

Démonstration. On raisonne par analyse synthèse.

Analyse : supposons que $u \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[\times\mathbb{T})$ est solution de (1) et (2). Alors pour tout $t>0$, $x \mapsto u(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{T}$ et donc on peut écrire, avec convergence normale de la série en x,

$$\forall t>0, \forall x \in \mathbb{T}, \quad u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e_n(x)$$

où $e_n : x \mapsto e^{inx}$ et où

$$\forall t>0, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}dx.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on cherche alors à déterminer c_n. On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale sur tout compact de $]0,+\infty[$ puisque $[0,2\pi]$ est un compact et que $\frac{\partial u}{\partial t}$ est continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{T}$. On obtient alors $c_n \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$ et $\forall t>0$,

$$\begin{aligned}
c_n'(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)e^{-inx}dx \\
&= 0 + \frac{in}{2\pi}\left[u(t,x)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} - \frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}dx \\
&= 0 - n^2 c_n(t).
\end{aligned}$$

1. Merci à Michel Nassif pour l'idée et certains éléments du développement.

Par deux intégrations par parties, en utilisant la périodicité. On résout alors l'équation différentielle vérifiée par c_n et on trouve $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ pour tout $t > 0$. Il nous faut alors déterminer c_n^0. On sait que $c_n^0 = \lim_{t\to 0} c_n(t)$. D'autre part, grâce à (2),

$$\left| c_n(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{T}} |u(t,x) - f(x)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$c_n^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

On obtient finalement, $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}$,

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny}dy \Big) e^{-n^2 t} e^{inx}$$

on peut alors intervertir somme et intégrale puisque $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \big| f(y)e^{-n^2 t} \big| dy < +\infty$$

et on a ainsi $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}$,

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in(x-y)} e^{-n^2 t} \Big) f(y)dy = (K_t * f)(x)$$

où $K_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} e^{-n^2 t}$. On a donc trouvé un candidat pour la solution.

Synthèse : l'analyse nous a montré qu'il n'y avait qu'une possibilité de solution, ce qui assure l'unicité. On montre alors que $u(t,x) = (K_t * f)(x)$ est solution de (1) et (2). On écrit $u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t,x)$ où $u_n(t,x) = c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$ avec $c_n^0 = \int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny}dy$ (on a l'égalité par une interversion limite intégrale qu'on a déjà justifiée). On remarque alors que u_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{T}$ et qui vérifie (1). D'autre part, on a la majoration, pour $k, l \geqslant 0$, $t \geqslant a > 0$ et $x \in \mathbb{T}$,

$$\left| \frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l}(t,x) \right| \leqslant |c_n^0| n^{2k+l} e^{-n^2 a} \leqslant ||f||_\infty n^{2k+l} e^{-n^2 a}$$

qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme pour obtenir que $u \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{T})$ et qu'elle vérifie (1).

On montre enfin que u vérifie (2). Puisque alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, on a, pour $x \in \mathbb{T}$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n(x)$$

et d'autre part,
$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}, \quad u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{-n^2 t} e_n(x)$$
et donc
$$\forall t > 0, \quad \sup_{x\in\mathbb{T}} |u(t,x) - f(x)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 - e^{-n^2 t}) |c_n(f)|.$$
Or on sait que, puisque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$,
$$c_n(f) = -\frac{1}{n^2} c_n(f'')$$
et ainsi
$$\forall t > 0, \quad \sup_{x\in\mathbb{T}} |u(t,x) - f(x)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 - e^{-n^2 t}) \frac{1}{n^2} |c_n(f'')| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 - e^{-n^2 t}) \frac{1}{n^2} ||f''||_\infty$$
et on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure. □

Remarque. On peut en fait montrer le même théorème avec $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. L'analyse se fait de la même manière puisque l'on a seulement utilisé la continuité de f, et de même, la vérification que u vérifie (1) est identique. On montre enfin que u vérifie (2). On utilise pour cela le cas $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ et on commence par montrer que K_t est positif pour tout $t > 0$. En effet, soit $t > 0$, la série
$$g_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x-2\pi n)^2/4t}$$
converge normalement sur $\mathbb{T}$ puisqu'on a la majoration
$$e^{-(x-2\pi n)^2/4t} \leqslant e^{-2\pi(n-1)^2/4t}.$$
Ainsi $g_t \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et on calcule ses coefficients de Fourier :
$$\begin{aligned}
\widehat{g_t}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x-2\pi n)^2/4t} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-(x-2\pi n)^2/4t} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-2\pi n}^{-2\pi(n-1)} e^{-y^2/4t} e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} e^{-iky} dy = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-tk^2}
\end{aligned}$$
par convergence normale de la série, par changement de variable $y = x - 2\pi n$ et par calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne. On a alors convergence absolue des coefficients de Fourier de g_t, et donc par un corollaire du théorème de Fejér, g_t est égale à sa série de Fourier, et on a donc,
$$\sqrt{\frac{2\pi}{t}} g_t(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x-2\pi n)^2/4t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2} e^{inx} = K_t(x).$$

On a d'autre part, par convergence normale de la série en $x \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_t(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2t}\int_0^{2\pi} e^{inx}dx = 1$$

pour tout $t > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on prend alors $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ telle que $||f-g||_\infty < \varepsilon$. On a, par inégalité triangulaire, linéarité de la convolution, inégalité de convolution, et par le cas $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}
||K_t * f - f||_\infty &\leqslant ||K_t * f - K_t * g||_\infty + ||K_t * g - g||_\infty + ||g - f||_\infty \\
&= ||K_t * (f-g)||_\infty + ||K_t * g - g||_\infty + ||g - f||_\infty \\
&\leqslant ||K_t||_1 ||f-g||_\infty + ||K_t * g - g||_\infty + ||g - f||_\infty \\
&= 2||f-g||_\infty + ||K_t * g - g||_\infty \\
&\leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}$$

pour t suffisamment petit, d'où la conclusion.

Commentaire : pour justifier le recasage dans la leçon 235 : interversion de limites et d'intégrales, on note qu'on dérive deux fois sous l'intégrale, qu'il y a une interversion somme - intégrale et un théorème de convergence dominée.