### 2.3 Borne de Bézout

**Références :**[1] J.Y. Mérindol, *Nombres et algèbre*, EDP Sciences, 2006,
A. Szpirglas, *Mathématiques L3*, Pearson Education, 2009.

**Leçons concernées :** 144, 152.

**Théorème 1.** *Soit $k$ un corps infini et soit $A, B \in k[X,Y]$ premiers entre eux de degrés totaux respectifs $m$ et $n$. Alors si on note $Z(A)$ l'ensemble des zéros de $A$, on a*

$$\mathrm{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leqslant mn.$$

*Démonstration. Étape 1 :* l'ensemble $Z(A) \cap Z(B)$ est fini. On note $R_X = \mathrm{res}_X(A,B)$ et $R_Y = \mathrm{res}_Y(A,B)$ qui sont des polynômes non nuls, puisque $A$ et $B$ sont premiers entre eux, respectivement de $k[Y]$ et $k[X]$. Pour tout $(x,y) \in Z(A) \cap Z(B)$, on a $R_X(y) = 0$ puisque $x$ étant une racine de $A(X,y)$ et $B(X,y)$, ces deux polynômes ont un facteur commun. De même $R_Y(x) = 0$ et donc

$$\mathrm{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leqslant \deg R_X \deg R_Y.$$

*Étape 2 :* majoration de $\deg R_Y$. On écrit alors $A = \sum_{i=0}^{p} a_i(X)Y^i$ et $B = \sum_{j=0}^{q} b_j(X)Y^j$ où $\deg a_i \leqslant m-i$ et $\deg b_j \leqslant n-j$, et donc $R_X$ est le déterminant de la matrice de Sylvester suivante :

$$C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p+q} = \begin{pmatrix} a_p & & (0) & b_q & & (0) \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_p & b_0 & & \ddots \\ a_0 & & \vdots & & \ddots & b_q \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_0 & (0) & & b_0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall j \in [|1;q|], \qquad c_{i,j} = \begin{cases} a_{p-(i-j)} & \text{si } 0 \leqslant i-j \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall j \in [|q+1;p+q|], \qquad c_{i,j} = \begin{cases} b_{q-(i-(j-q))} & \text{si } 0 \leqslant i-j+q \leqslant q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. adapté d'un développement rédigé de Harold Favreau et Lucien Grillet.

et donc pour tour $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$,

$$\begin{aligned}\deg\Big(\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{p+q} c_{\sigma(j),j}\Big) &= \sum_{j=1}^{q}\deg(c_{\sigma(j),j}) + \sum_{j=q+1}^{p+q}\deg(c_{\sigma(j),j})\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{q}\big(m-p+\sigma(j)-j\big) + \sum_{j=q+1}^{p+q}\big(n+\sigma(j)-j\big)\\ &= mq-pq+np = mn+(m-p)(q-n) \leqslant mn.\end{aligned}$$

En effet, si $\sigma$ est tel qu'il existe $j \in [|1, p+q|]$ tel que $c_{\sigma(j),j}$, alors le produit est nul et donc son degré est $-\infty$. Sinon, on peut appliquer la majoration indiquée d'après l'expression de $c_{\sigma(j),j} = 0$ dans le cas non nul et les majorations des degrés de $a_i$ et $b_i$. Un tel $\sigma$ existe toujours car sinon $R_Y$ serait nul ce que l'on a exclu par hypothèse. Ainsi, d'après la formule du déterminant, $\deg R_Y \leqslant mn$.

*Étape 3 :* changement de variables. On sait que pour tout $(x,y) \in Z(A)\cap Z(B)$, $R_X(y) = 0$. Ainsi, si toutes les abscisses des éléments de $Z(A)\cap Z(B)$ sont différentes on a le résultat souhaité. On va se ramener à ce cas par un changement de variables. On pose

$$\Gamma = \left\{\frac{x-x'}{y-y'} \mid (x,y),(x',y') \in Z(A)\cap Z(B), y \neq y'\right\}$$

qui est un ensemble de cardinal fini, ainsi, comme $k$ est infini il existe $u \in k^*\backslash\Gamma$. On effectue alors le changement de variables $X' = X+uY$ et $Y' = Y$ et on pose $\widetilde{A}(X',Y') = A(X,Y)$ et $\widetilde{B}(X',Y') = B(X,Y)$. On considère alors la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} Z(A)\cap Z(B) & \to & Z\big(\mathrm{res}_{Y'}(\widetilde{A},\widetilde{B})\big) \\ (x,y) & \mapsto & x+uy. \end{array}$$

La fonction $\varphi$ est bien définie puisque si $(x,y) \in Z(A)\cap Z(B)$, alors $\widetilde{A}(x+uy,y) = A(x,y) = 0$ et $\widetilde{B}(x+uy,y) = B(x,y) = 0$ et donc $\mathrm{res}_{Y'}(\widetilde{A},\widetilde{B})(x+uy) = 0$. D'autre part, puisque $u \notin \Gamma$, $\varphi$ est injective. Ainsi

$$\mathrm{Card}\,\big(Z(A)\cap Z(B)\big) \leqslant \mathrm{Card}\,\Big(Z\big(\mathrm{res}_{Y'}(\widetilde{A},\widetilde{B})\big)\Big) \leqslant \deg\big(\widetilde{A}\big)\deg\big(\widetilde{B}\big) = \deg(A)\deg(B).$$

□

*Remarques.* Le théorème de Bézout plus général affirme que sous de bonnes hypothèses le cardinal de l'ensemble des zéros communs comptés avec multiplicités est exactement $mn$.

On peut travailler sur un corps quelconque et même sur un anneau intègre, il suffit pour cela de considérer la clôture algébrique du corps des fractions de l'anneau.