3.5 Espace de Bergman du disque unité

Référence : F. Bayen, C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

Leçons concernées : 201, 202, 205, 208, 209, 213, 234, 243, 245.

On définit l'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ de carré intégrable sur $\mathbb{D}$. On munit cet espace du produit scalaire $(.|.)$ de L^2 et de la norme $||.||_2$ induite. On commence par montrer

Lemme 1. *Pour tout K compact de $\mathbb{D}$, pour tout $f \in B^2(\mathbb{D})$,*

$$||f||_{\infty,K} \leqslant \frac{||f||_2}{\sqrt{\pi}\ d(K,\mathbb{S}^1)}$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{D}$, et soit $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \mathbb{D}$. Par formule de la moyenne, pour $0 \leqslant \rho \leqslant r$, $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\ d\theta$ et donc, en multipliant par ρ et en intégrant par rapport à ρ :

$$\frac{r^2}{2}f(a) = \int_0^r f(a)\rho\ d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\rho\ d\rho\ d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{D(a,r)} f(z)\ dz.$$

Ainsi, $f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} f(z)\ dz$ et par inégalité de Hölder,

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{D(a,r)} |f(z)|^2\ dz\right)^{1/2}\left(\int_{D(a,r)} dz\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\sqrt{\pi r^2}||f||_2 = \frac{||f||_2}{\sqrt{\pi} r}.$$

On fait alors tendre r vers $d(a,\mathbb{S}^1)$, et on conclut avec $d(a,\mathbb{S}^1) \geqslant d(K,\mathbb{S}^1)$ pour $a \in K$. □

On utilise le lemme pour montrer la complétude de l'espace $B^2(\mathbb{D})$.

Proposition 2. *L'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. On considère $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$. Pour tout K compact de $\mathbb{D}$, on a, d'après le lemme, pour tous $m,n \geqslant 0$,

$$||f_n - f_m||_{\infty,K} \leqslant \frac{||f_n - f_m||_2}{\sqrt{\pi}\ d(K,\mathbb{S}^1)}$$

et donc par hypothèse, $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$ donc converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ d'après le théorème de Weierstrass. D'autre part, puisque $L^2(\mathbb{D})$ est complet d'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe $g \in L^2(\mathbb{D})$ telle que f_n converge dans $L^2(\mathbb{D})$ vers g. De plus, d'après ce théorème, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge presque partout vers g dans $\mathbb{D}$. Ainsi, par unicité de la limite simple, presque partout dans $\mathbb{D}$, $f = g$ et donc $f \in L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D}) = B^2(\mathbb{D})$. □

On va enfin exhiber une base hilbertienne de l'espace $B^2(\mathbb{D})$. On pose, pour $n \geqslant 0$,

$$e_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n. \end{array}$$

Proposition 3. *La famille $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration. On commence par montrer que la famille est orthonormée : si $n, m \geqslant 0$, on a

$$(e_n, e_m) = \int_{\mathbb{D}} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \overline{z}^m \, dz = \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n+m} e^{i\theta(n-m)} r \, d\theta \, dr$$

par changement de variables. On conclut alors avec $\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} \, d\theta = 2\pi\delta_m^n$ et $\int_0^1 r^{2n+1} \, dr = \frac{1}{2(n+1)}$.

On montre maintenant que la famille est totale, en utilisant le critère de densité : on montre que $(\mathrm{Vect}(e_n, n \geqslant 0))^\perp = \{0\}$. Soit $f \in (\mathrm{Vect}(e_n, n \geqslant 0))^\perp$. La fonction f est développable en série entière au voisinage de 0, on écrit alors, pour $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Pour tout $0 < r < 1$, la série de droite est normalement convergente sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$. Alors, pour $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} c_n = (e_n, f) = 0 &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{f(z)} \, dz = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \int_{|z|<r} z^n \overline{f(z)} \, dz \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \int_{|z|<r} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^n \overline{z}^k \, dz = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|z|<r} a_k z^n \overline{z}^k \, dz \end{aligned}$$

par convergence dominée et puisque sur $\overline{D(0,r)}$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ est normalement convergente. Or,

$$\int_{|z|<r} z^n \overline{z}^k \, dz = \frac{2\pi r^{n+k+2}}{n+k+2} \delta_n^k = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_n^k.$$

Ainsi, $c_n = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n \lim_{r\to 1} r^{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n = 0$, et donc $a_n = 0$ pour tout n et $f = 0$ sur $\mathbb{D}$ ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque. Puisque les coefficients d'un vecteur dans une base hilbertienne sont de carrés sommable, si $f \in B^2(\mathbb{D})$, $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, alors $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 \frac{\pi}{n+1} < +\infty$