3.16 Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible

Référence : X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses, 2008.

Leçons concernées : 230, 235, 241, 243.

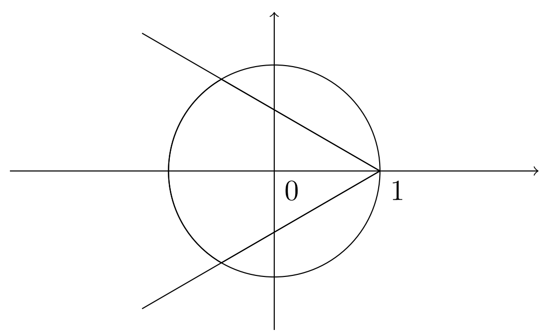
Théorème 1 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité $\mathbb{D}$. Pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$, on note*

$$\Delta_{\theta_0} := \left\{ z \in \mathbb{C}, \exists \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

alors

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n.$$

Le domaine Δ_{θ_0} est représenté ici :



Démonstration. On note $S = \sum_{k\geqslant 0} a_k$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ les sommes partielles et $R_n = S - S_n$ les restes. En remarquant que pour tout $n \geqslant 0$ $a_n = R_{n-1} - R_n$, (en convenant que $R_{-1} = 0$), on a, pour tout $|z| < 1$,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\Big) - S_N &= \sum_{n=0}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1) = (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1)\end{aligned}$$

et donc, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient, puisque la série $\sum R_n z^n$ est absolument convergente sur $\mathbb{D}$,

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

Il s'agit alors de majorer cette quantité. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n > N$, $|R_n| < \varepsilon$. On observe alors que d'après la relation précédente, pour tout $|z| < 1$,

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + |z-1|\varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} |z|^n \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

On se donne alors $z \in \Delta_{\theta_0}$, qui s'écrit donc $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$. On a $|z|^2 = (1 - \rho\cos(\theta))^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2 = 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2$ et donc pour $\rho \leqslant \cos(\theta_0)$,

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos(\theta) - \rho^2}(1+|z|) \leqslant \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho} \leqslant \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} = \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

par hypothèse sur ρ et par décroissance du cosinus sur $[0, \pi/2[$. On choisit alors $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$ alors pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|z-1| \leqslant \min(\alpha, \cos(\theta_0))$,

$$|f(z) - S| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)} = \varepsilon\Big(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}\Big)$$

d'où le résultat. $\square$

Application 2. *Le théorème d'Abel angulaire appliqué à la série entière* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$ *sur* $\mathbb{D}$ *avec* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *convergente nous donne*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2).$$

De même,

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{x\to 1} \arctan(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Remarque. La réciproque du théorème est fausse comme le montre

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \underset{\substack{z\to 1\\ |z|<1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

alors que la série $\sum (-1)^n$ diverge. Le théorème suivant donne cependant une réciproque partielle.

Théorème 3 (taubérien faible)**.** *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \geqslant 1$*. On note* f *la somme de cette série entière sur le disque unité. On suppose qu'il existe* $S \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S.$$

Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ *alors* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge et* $\sum_{n\geqslant 0} a_n = S$.

Démonstration. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ les sommes partielles. On a, pour $n \geqslant 1$, $x \in]0,1[$,

$$S_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

Or pour $x \in]0,1[$, $(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leqslant k(1 - x)$, ainsi,

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1 - x) \sum_{k=0}^{n} k a_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{n} |a_k| x^k \leqslant (1 - x) M n + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{n(1 - x)}$$

en notant M un majorant de la suite $(ka_k)_k$ qui converge vers 0 par hypothèse. Soit alors $0 < \varepsilon < 1$. On a donc

$$\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leqslant M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{\varepsilon}.$$

Soit $N_0 \geqslant 0$ tel que $\sup_{k>N_0} k|a_k| \leqslant \varepsilon^2$, alors pour tout $n \geqslant N_0$,

$$\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leqslant \varepsilon(M + 1).$$

Par hypothèse, puisque $\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, il existe $N_1 \geqslant N_0$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| < \varepsilon$. On conclut alors par inégalité triangulaire. $\square$