Développement BKW haute fréquence pour un problème aux limites hyperbolique quasi-linéaire

Corentin Kilque

Séminaire Landau - Rennes

10 mai 2021

Introduction

On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} L(u^\varepsilon, \partial_z)\, u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1} A_j(u^\varepsilon)\, \partial_j u^\varepsilon + \partial_d u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ B\, u^\varepsilon_{|x_d=0} = \varepsilon\, g^\varepsilon & \text{sur } \omega_T, \\ u^\varepsilon_{|t\leqslant 0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où

- l'espace Ω_T est défini comme $\Omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ et son bord ω_T comme $\omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$, avec $T > 0$,
- on note les variables $z = (t, x) = (t, y, x_d) \in \Omega_T = (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$, avec $\partial_j := \partial_{x_j}$, $j = 1, \dots, d$ et $z' := (t, y) \in \omega_T = (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$ la variable de bord,
- l'inconnue u^ε est une fonction de Ω_T dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$,
- pour tout $j = 1, \dots, d$, A_j est une application régulière de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$,
- la matrice B appartient à $\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ pour un certain $M \geqslant 1$ et est de rang maximal.

Introduction

On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} L(u^\varepsilon, \partial_z)\, u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1} A_j(u^\varepsilon)\, \partial_j u^\varepsilon + \partial_d u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ B\, u^\varepsilon_{|x_d=0} = \varepsilon\, g^\varepsilon & \text{sur } \omega_T, \\ u^\varepsilon_{|t\leqslant 0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

La dépendance en ε du système provient du terme source $\varepsilon\, g^\varepsilon$, où g^ε est donnée par, pour $z' \in \omega_T$,

$$g^\varepsilon(z') = G\left(z', \frac{z' \cdot \zeta_1}{\varepsilon}, \frac{z' \cdot \zeta_2}{\varepsilon}\right),$$

où G est une fonction de $H^\infty(\omega_T \times \mathbb{T}^2)$ s'annulant pour t négatif.

On cherche une solution approchée de (1) en haute fréquence, c'est-à-dire lorsque $\varepsilon \to 0$, sous la forme d'un développement BKW.

Plan de l'exposé

$\longrightarrow$ Étude des fréquences mises en jeu.

$\longrightarrow$ Cadre fonctionnel adapté à cet ensemble de fréquences.

$\longrightarrow$ Ansatz et résultat principal.

$\longrightarrow$ Étude BKW formelle et cascade d'équations.

$\longrightarrow$ Résolution d'un certain problème rapide.

$\longrightarrow$ Problème vérifié par le profil principal.

$\longrightarrow$ Polarisation et équation d'évolution.

$\longrightarrow$ Conclusion.

Références

Jean-Francois Coulombel, Olivier Gues, and Mark Williams.
Resonant leading order geometric optics expansions for quasilinear hyperbolic fixed and free boundary problems.
Comm. Partial Differential Equations, 36(10) :1797–1859, 2011.

Matthew Hernandez.
Resonant leading term geometric optics expansions with boundary layers for quasilinear hyperbolic boundary problems.
Comm. Partial Differential Equations, 40(3) :387–437, 2015.

J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch.
Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics.
Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 28(1) :51–113, 1995.

Mark Williams.
Nonlinear geometric optics for hyperbolic boundary problems.
Comm. Partial Differential Equations, 21(11-12) :1829–1895, 1996.

Mark Williams.
Singular pseudodifferential operators, symmetrizers, and oscillatory multidimensional shocks.
J. Funct. Anal., 191(1) :132–209, 2002.

Fréquences caractéristiques

On remarque que, si $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, on a

$$L(0, \partial_z) \left\{ U(z)\, e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon} \right\} = \left[L(0, \partial_z)\, U(z) + \frac{i}{\varepsilon}\, L(0, \alpha)\, U(z) \right] e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon},$$

avec

$$L(0, \alpha) := \tau I + \sum_{i=1}^{d-1} \eta_i A_i(0) + \xi I.$$

On dit que α est *caractéristique* si $L(0, \alpha)$ n'est pas inversible.

Hypothèse

Pour tout α dans $\mathbb{R}^{d+1}$, on a

$$\mathbb{C}^N = \ker L(0, \alpha) \oplus \operatorname{Im} L(0, \alpha).$$

Pour tout α dans $\mathbb{R}^{d+1}$, on définit π_α le projecteur sur $\ker L(0, \alpha)$ parallèlement à $\operatorname{Im} L(0, \alpha)$.

Ensemble de fréquences à l'intérieur du domaine

Quelles fréquences peuvent apparaitre dans la solution ?

- Les deux fréquences au bord ζ_1 et ζ_2 au bord engendrent par non linéarité le groupe de fréquences
$$\mathcal{F}_b := \zeta_1 \, \mathbb{Z} \oplus \zeta_2 \, \mathbb{Z}$$
au bord.

- Puisque $L(0, \partial_z)$ est hyperbolique, toute fréquence $\zeta \in \zeta_1 \, \mathbb{Z} \oplus \zeta_2 \, \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est relevée en des fréquences caractéristiques $\alpha = (\zeta, \xi)$, avec $\xi \in \mathbb{R}$.

Pour tout $\zeta \in \zeta_1 \, \mathbb{Z} \oplus \zeta_2 \, \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on note $\xi_j(\zeta)$, $j \in \mathcal{H}(\zeta)$ les réels tels que $\alpha_j(\zeta) := \big(\alpha, \xi_j(\zeta)\big)$ est caractéristique.

On note que le cardinal de $\mathcal{H}(\zeta)$ est inférieur ou égal à N.

L'ensemble de fréquences à l'intérieur du domaine est donc donné par
$$\mathcal{F} := \Big\{\alpha_j(\zeta), \; \zeta \in \mathcal{F}_b, \, j \in \mathcal{H}(\zeta)\Big\}.$$

Cadre fonctionnel - espace général

Il nous faut donc un cadre fonctionnel permettant de considérer une superposition d'ondes de la forme

$$a(x)\, e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon}, \quad \alpha \in \mathcal{F}.$$

On écrit, si $\alpha = (\zeta, \xi)$ avec $\zeta = n_1\zeta_1 + n_2\zeta_2 \in \zeta_1\mathbb{Z} \oplus \zeta_2\mathbb{Z}$, et $z = (z', x_d) \in \omega_T \times \mathbb{R}_+$,

$$a(x)\, e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon} = a(x)\, e^{in_1 z'\cdot\zeta_1/\varepsilon}\, e^{in_2 z'\cdot\zeta_2/\varepsilon}\, e^{i\xi\, x_d/\varepsilon} = a(x)\, e^{in_1\,\theta_1}\, e^{in_2\,\theta_2}\, e^{i\xi\,\psi_d},$$

avec $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (z'\cdot\zeta_1/\varepsilon, z'\cdot\zeta_2/\varepsilon) \in \mathbb{T}^2$ et $\psi_d := x_d/\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ les nouvelles variables rapides.

Définition

Pour $s \geqslant 0$ et $T > 0$ on définit $\mathcal{E}_{s,T}$ comme l'ensemble des fonctions

$$U : (z', x_d, \theta, \psi_d) \in \omega_T \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto U(z', x_d, \theta, \psi_d)$$

continues bornées par rapport à $(x_d, \psi_d) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^2)$, équipé de le norme évidente

$$\|U\|_{\mathcal{E}_{s,T}} := \sup_{x_d>0,\psi_d>0} \|U(.,x_d,.,\psi_d)\|_{H^s(\omega_T\times\mathbb{T}^2)}\,.$$

Cadre fonctionnel - espace de profils

Pour considérer des superpositions d'ondes de la forme

$$a(x)\, e^{in_1\theta_1}\, e^{in_2\theta_2}\, e^{i\xi\psi_d},$$

on utilise un cadre de fonctions presque-périodiques. On appelle *polynôme trigonométrique* (en ψ_d) toute fonction U de $\mathcal{E}_{s,T}$ qui s'écrit comme une somme finie

$$U(z,\theta,\psi_d) = \sum_{\xi\in\mathbb{R}} U_\xi(z,\theta)\, e^{i\,\psi_d\,\xi}.$$

Définition

L'espace des profils $\mathcal{P}_{s,T}$ est défini comme la fermeture dans $\mathcal{E}_{s,T}$ de l'ensemble des polynômes trigonométriques.

Un profil U de $\mathcal{P}_{s,T}$ s'écrit donc

$$U(z,\theta,\psi_d) = \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} \sum_{\xi\in\mathbb{R}} U_{n_1,n_2,\xi}(z)\, e^{in_1\theta_1}\, e^{in_2\theta_2}\, e^{i\xi\psi_d}.$$

Ansatz et résultat principal

On cherche une solution approchée de (1) sous la forme d'une série formelle $u^{\varepsilon,\text{app}}(z, z'\cdot\zeta_1/\varepsilon, z'\cdot\zeta_2/\varepsilon, x_d/\varepsilon)$, où $u^{\varepsilon,\text{app}}$ est donnée par

$$u^{\varepsilon,\text{app}}(z,\theta,\psi_d) := \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k\, U_k(z,\theta,\psi_d),$$

avec U_1 dans $\mathcal{P}_{s,T}$ et U_k une série trigonométrique formelle, pour $k \geqslant 2$.

Théorème

Pour $s \geqslant 0$ suffisamment grand, il existe un temps $T > 0$ et un profil principal U_1 solution dans $P_{s,T}$ du problème (2) donné plus bas, gouvernant l'évolution du profil principal.

On souhaite que $u^{\varepsilon,\text{app}}$ vérifie, au sens des séries formelles,

$$\begin{cases} L(u^{\varepsilon,app},\partial_z)\, u^{\varepsilon,app} = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ B\, u^{\varepsilon,app}_{|x_d=0} = \varepsilon\, g^\varepsilon & \text{sur } \omega_T, \\ u^{\varepsilon,app}_{|t\leqslant 0} = 0. \end{cases}$$

Étude BKW formelle I

On a, pour $j = 1, \dots, d-1$,

$$A_j(u^{\varepsilon,\text{app}}) = A_j\Big(\sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k\, U_k\Big) = A_j(0) + \varepsilon\, dA_j(0)\cdot U_1 + \sum_{k\geqslant 2} \varepsilon^k \Big[dA_j(0)\cdot U_k + G^j_{k-1}\Big],$$

et donc

$$L(u^{\varepsilon,\text{app}}, \partial_z) = L(0,\partial_z) + \varepsilon\, L_1(U_1,\partial_x) + \sum_{k\geqslant 2} \varepsilon^k\, L_k(U_k,\partial_x),$$

où

$$L(0,\partial_z) = \partial_t + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(0)\,\partial_j + \partial_d, \quad L_1(U_1,\partial_x) := \sum_{j=1}^{d-1} dA_j(0)\cdot U_1\,\partial_j.$$

De même, si $\alpha \in \mathbb{R}^d$,

$$L(u^{\varepsilon,\text{app}}, \alpha) = L(0,\alpha) + \varepsilon\, L_1(U_1,\alpha) + \sum_{k\geqslant 2} \varepsilon^k\, L_k(U_k,\alpha),$$

avec une définition analogue de $L_1(U_1,\alpha)$.

Étude BKW formelle II

D'autre part,

$$L(u^{\varepsilon,\mathrm{app}},\partial_z)\Big[u^{\varepsilon,\mathrm{app}}(z,z'\cdot\zeta_1/\varepsilon,z'\cdot\zeta_2/\varepsilon,x_d/\varepsilon)\Big]$$

$$=\Big[L(u^{\varepsilon,\mathrm{app}},\partial_z)\,u^{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{2}L(u^{\varepsilon,\mathrm{app}},\zeta_j)\,\partial_{\theta_j}u^{\varepsilon,\mathrm{app}}+\frac{1}{\varepsilon}\partial_{\psi_d}u^{\varepsilon,\mathrm{app}}\Big]$$

$$(z,z'\cdot\zeta_1/\varepsilon,z'\cdot\zeta_2/\varepsilon,x_d/\varepsilon).$$

On a donc

$$L(u^{\varepsilon,\mathrm{app}},\partial_z)\Big[u^{\varepsilon,\mathrm{app}}(z,z'\cdot\zeta_1/\varepsilon,z'\cdot\zeta_2/\varepsilon,x_d/\varepsilon)\Big]=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\,W_k(z,z'\cdot\zeta_1/\varepsilon,z'\cdot\zeta_2/\varepsilon,x_d/\varepsilon),$$

où

$$W_0:=\Big\{\sum_{j=1}^{2}L(0,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j}+\partial_{\psi_d}\Big\}U_1,$$

et

$$W_1:=\Big\{\sum_{j=1}^{2}L(0,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j}+\partial_{\psi_d}\Big\}U_2+\Big\{L(0,\partial_z)+\sum_{j=1}^{2}L_1(U_1,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j}\Big\}U_1.$$

Opérateur rapide

Pour que l'on ait

$$L(u^{\varepsilon,app}, \partial_z)\, u^{\varepsilon,app} = 0,$$

il faut donc que $W_0 = W_1 = 0$. Ces deux équations impliquent l'*opérateur rapide*

$$\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) := L(0, \zeta_1)\, \partial_{\theta_1} + L(0, \zeta_2)\, \partial_{\theta_2} + \partial_{\psi_d},$$

déterminons son noyau et son image.

Si l'on a

$$\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})\, U = H,$$

avec U et H dans $\mathcal{P}_{s,T}$ donnés par

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} U_{n_1, n_2, \xi}(z)\, e^{in_1\theta_1}\, e^{in_2\theta_2}\, e^{i\xi\psi_d},$$

$$H(z, \theta, \psi_d) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} H_{n_1, n_2, \xi}(z)\, e^{in_1\theta_1}\, e^{in_2\theta_2}\, e^{i\xi\psi_d},$$

alors

$$\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})\, U = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{\xi \in \mathbb{R}} L\Big(0, (n_1\zeta_1 + n_2\zeta_2, \xi)\Big)\, U_{n_1, n_2, \xi}(z)\, e^{in_1\theta_1}\, e^{in_2\theta_2}\, e^{i\xi\psi_d}.$$

Résolution du problème rapide

Ainsi,

$$\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})\, U = H \;\Leftrightarrow\; L\Big(0, (n_1\zeta_1 + n_2\zeta_2, \xi)\Big)\, U_{n_1,n_2,\xi} = H_{n_1,n_2,\xi},\; \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in \mathbb{R},$$

et donc l'équation $\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})\, U = H$ admet une solution si et seulement si

$$H_{n_1,n_2,\xi} \in \operatorname{Im} L\Big(0, (n_1\zeta_1 + n_2\zeta_2, \xi)\Big),\; \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$\pi_{(n_1\zeta_1+n_2\zeta_2,\xi)}\, H_{n_1,n_2,\xi} = 0,\; \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

De même,

$$\mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d})\, U = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi_{(n_1\zeta_1+n_2\zeta_2,\xi)}\, U_{n_1,n_2,\xi} = U_{n_1,n_2,\xi},\; \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, si l'on définit le projecteur $\mathbf{E}$ sur $\mathcal{P}_{s,T}$ comme

$$\mathbf{E}\, U := \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} \sum_{\xi\in\mathbb{R}} \pi_{(n_1\zeta_1+n_2\zeta_2,\xi)}\, U_{n_1,n_2,\xi}\, e^{in_1\theta_1}\, e^{in_2\theta_2}\, e^{i\xi\psi_d},$$

alors on a

$$\ker \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) = \operatorname{Im} \mathbf{E}, \quad \operatorname{Im} \mathcal{L}(\partial_\theta, \partial_{\psi_d}) = \ker \mathbf{E}.$$

Système vérifié par le profil principal

Puisque l'on souhaite que l'on ait

$$\left\{ \sum_{j=1}^{2} L(0,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j} + \partial_{\psi_d} \right\} U_1 = 0,$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{2} L(0,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j} + \partial_{\psi_d} \right\} U_2 + \left\{ L(0,\partial_z) + \sum_{j=1}^{2} L_1(U_1,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j} \right\} U_1 = 0,$$

d'après l'analyse précédente, le profil principal U_1 doit vérifier le système

$$\mathbf{E}\, U_1 = U_1 \tag{2a}$$

$$\mathbf{E}\left[L(0,\partial_z)\, U_1 + \sum_{j=1}^{2} L_1(U_1,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j} U_1 \right] = 0 \tag{2b}$$

$$B\, U_1|_{x_d=0,\psi_d=0} = G \tag{2c}$$

$$U_1|_{t\leqslant 0} = 0. \tag{2d}$$

Polarisation du profil principal

On rappelle que le projecteur π_α sur $\ker L(0,\alpha)$ est nul pour α non caractéristique. Ainsi, si U_1 s'écrit dans $\mathcal{P}_{s,T}$ comme

$$U_1(z,\theta,\psi_d) = \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} \sum_{\xi\in\mathbb{R}} U^1_{n_1,n_2,\xi}(z)\, e^{in_1\theta_1}\, e^{in_2\theta_2}\, e^{i\xi\psi_d},$$

on a d'après l'équation (2a) de polarisation,

$$\begin{aligned} U_1 = \mathbf{E}\, U_1 &= \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} \sum_{\xi\in\mathbb{R}} \pi_{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta},\xi)}\, U^1_{n_1,n_2,\xi}(z)\, e^{in_1\theta_1}\, e^{in_2\theta_2}\, e^{i\xi\psi_d} \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} \sum_{j\in\mathcal{H}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})} \pi_{\alpha_j(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})}\, U^1_{\mathbf{n},j}(z)\, e^{i\mathbf{n}\cdot\theta}\, e^{i\xi_j(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})\,\psi_d}, \end{aligned}$$

où l'on a noté $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta} = n_1\zeta_1 + n_2\zeta_2$ pour $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi,

$$U_1 = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} \sum_{j\in\mathcal{H}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})} U^1_{\mathbf{n},j}(z)\, e^{i\mathbf{n}\cdot\theta}\, e^{i\xi_j(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})\,\psi_d},$$

avec $U^1_{\mathbf{n},j} = \pi_{\alpha_j(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})}\, U^1_{\mathbf{n},j}$ pour tout $\mathbf{n}$ dans $\mathbb{Z}^2$ et j dans $\mathcal{H}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})$.

Équation d'évolution pour le profil principal I

On peut alors réécrire l'équation d'évolution (2b). On a

$$L(0,\partial_z)\,U_1 = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{j\in\mathcal{H}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})} L(0,\partial_z)\,U^1_{\mathbf{n},j}(z)\,e^{i\mathbf{n}\cdot\theta}\,e^{i\xi_j(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})\,\psi_d},$$

et

$$\sum_{j=1}^{2} L_1(U_1,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j}U_1 =$$

$$\sum_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2\in\mathbb{Z}^2}\ \sum_{\substack{j_1\in\mathcal{H}(\mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{\zeta})\\ j_2\in\mathcal{H}(\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{\zeta})}} L_1\left(U^1_{\mathbf{n}_1,j_1},\mathbf{n}_2\cdot\zeta\right)\,U^1_{\mathbf{n}_2,j_2}(z)\,e^{i(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)\cdot\theta}\,e^{i(\xi_{j_1}(\mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{\zeta})+\xi_{j_2}(\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{\zeta}))\,\psi_d}.$$

Équation d'évolution pour le profil principal II

Ainsi,

$$\mathbf{E}\left[L(0,\partial_z)\,U_1+\sum_{j=1}^{2}L_1(U_1,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j}U_1\right]=$$

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{j\in\mathcal{H}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})}\pi_{\alpha_j(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})}\,L(0,\partial_z)\,U^1_{\mathbf{n},j}(z)\,e^{i\mathbf{n}\cdot\theta}\,e^{i\xi_j(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\zeta})\,\psi_d}$$

$$+\sum_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2\in\mathbb{Z}^2}\sum_{\substack{j_1\in\mathcal{H}(\mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{\zeta})\\ j_2\in\mathcal{H}(\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{\zeta})}}\pi_{\alpha_{j_1}(\mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{\zeta})+\alpha_{j_2}(\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{\zeta})}\,L_1\left(U^1_{\mathbf{n}_1,j_1},\mathbf{n}_2\cdot\zeta\right)\,U^1_{\mathbf{n}_2,j_2}(z)$$

$$e^{i(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)\cdot\theta}\,e^{i(\xi_{j_1}(\mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{\zeta})+\xi_{j_2}(\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{\zeta}))\,\psi_d}.$$

Que resterait-il à faire ?

$\rightarrow$ Montrer des estimations a priori pour l'équation d'évolution.

$\rightarrow$ Pour cela il faut déterminer une condition au bord à partir de $B\,U_1|_{x_d=0,\psi_d=0} = G$, cela demande du travail.

$\rightarrow$ Pour justifier le développement asymptotique, c'est-à-dire montrer qu'il approche effectivement la solution exacte, il y a deux possibilités :

- $\rightarrow$ disposer d'une solution exacte sur un intervalle de temps indépendant de ε,
- $\rightarrow$ construire un très grand nombre de correcteurs U_k, $k \geqslant 2$ du développement asymptotique.

Ce deux point sont des problèmes ouverts à ce stade.

Merci de votre attention !