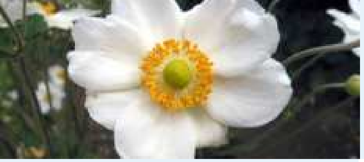
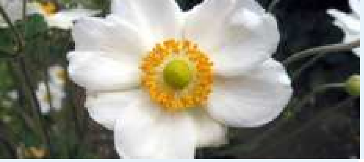


Problèmes ouverts en dynamique holomorphe

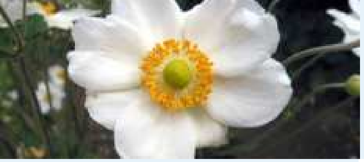
en dimension 1

Arnaud Chéritat

C.N.R.S. / Institut de Mathématiques de Toulouse



Présentation du sujet

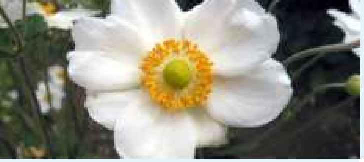


De quoi s'agit-il ?

On veut étudier les suites définies par récurrence

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

où z_n est un nombre complexe et f est holomorphe.



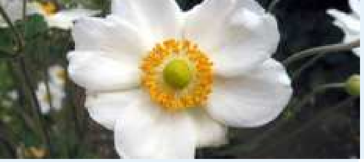
De quoi s'agit-il ?

On veut étudier les suites définies par récurrence

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

où z_n est un nombre complexe et f est holomorphe.

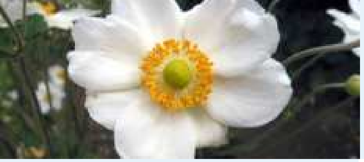
La suite (z_n) est appelée orbite de z_0.



Changement de variable = conjugaison

Si on pose $u_n = \phi(z_n)$ alors la relation de récurrence devient

$$u_{n+1} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(u_n)$$

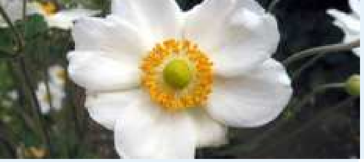


Naissance. . .

. . . avec le Grand prix des sciences mathématiques de 1918.

Dans les années 1910, des progrès en théorie des fonctions holomorphes, dus à Montel, en particulier la notion de famille normale, laissent entrevoir de possibles applications dans l'étude *globale* de l'itération des *fractions rationnelles*. L'Académie des sciences décide d'en faire le sujet du grand prix de 1918.

Pierre Fatou et Gaston Julia se lancent dans la course et publient des résultats proches et fondateurs. Fatou se retire cependant du concours et c'est Julia qui remporte le prix.

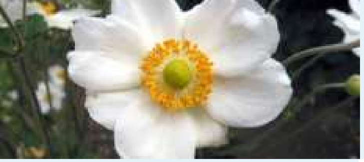


Les fractions rationnelles

Ce sont les quotients de polynômes:

$$f = P/Q.$$

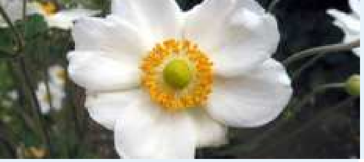
points critiques, valeurs critiques, revêtement ramifié, degré



Points périodiques : terminologie

Au tableau

Montrer `BAF.exe` sans le Julia



J et F

Tout deux mirent en évidence une même dichotomie de la sphère:

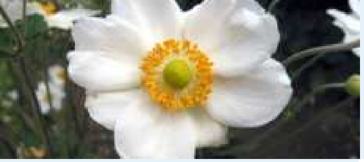
Tout deux mirent en évidence une même dichotomie de la sphère:

1. Un lieu où la dynamique est chaotique. Noté J.
2. Un lieu où la dynamique est régulière. Noté F.

Donner la définition de J et F.

Théorème (J. & F.) *J et F forment une partition de la sphère.*

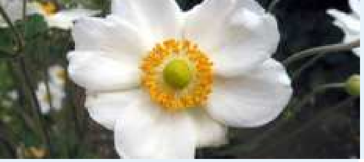
citer quelques autres résultats



Image

Montrer `1.png`

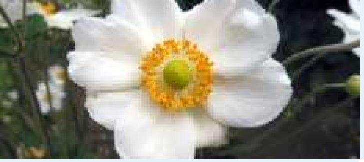
En profiter pour introduire les points paraboliques et dém. qu'ils ont toujours des pétales dans le cas rationnel de degré ≥ 2.



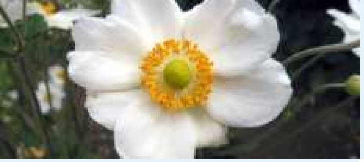
Julia total

Il arrive que F soit vide, c'est à dire $J = \widehat{\mathbb{C}}$.

Montrer `1b.png`



Théorèmes



Classification des composantes de Fatou périodiques

Présentation
Théorèmes
Cps. Fatou périod.
Points critiques
Hyperbolique
Non-errance
Cycles neutres irrationnels
Outils
Familles de fonctions
Autres problèmes

Les ensembles J et F sont *totalement invariants*.

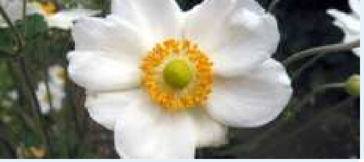
$$(X \text{ tot. invar. ssi } f(X) = X = f^{-1}(X))$$

Exercice de topologie: l'image d'une composante connexe de F est une composante connexe de F.

Théorème (J. & F.) *Toute composante périodique est soit :*

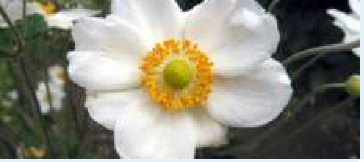
1. *le bassin immédiat d'un point périodique attractif ou d'un pétale parabolique,*
2. *un domaine de rotation, de type disque ou anneau.*

Montrer des exemples avec `BAF.exe` et `2.png`



Points critiques

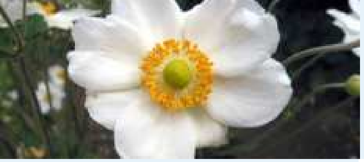
Théorème (J. & F.) *Soit U le bassin immédiat d'un point périodique attractif ou d'un pétale parabolique. Alors il y a un point critique de f dans l'orbite (finie) de U.*



Points critiques

Théorème (J. & F.) *Soit U le bassin immédiat d'un point périodique attractif ou d'un pétale parabolique. Alors il y a un point critique de f dans l'orbite (finie) de U.*

Théorème (Fatou, Mañé 1993) *Soit U un domaine de rotation. Alors chaque composante connexe de sa frontière ∂U est contenue dans l'adhérence de l'orbite d'un point critique récurrent.*



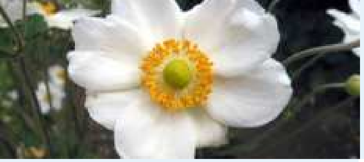
Points critiques

Présentation
Théorèmes
Cps. Fatou périod.
Points critiques
Hyperbolique
Non-errance
Cycles neutres irrationnels
Outils
Familles de fonctions
Autres problèmes

Théorème (J. & F.) *Soit U le bassin immédiat d'un point périodique attractif ou d'un pétale parabolique. Alors il y a un point critique de f dans l'orbite (finie) de U.*

Théorème (Fatou, Mañé 1993) *Soit U un domaine de rotation. Alors chaque composante connexe de sa frontière ∂U est contenue dans l'adhérence de l'orbite d'un point critique récurrent.*

montrer `3.png` et `BAF.exe` avec le lapin gras



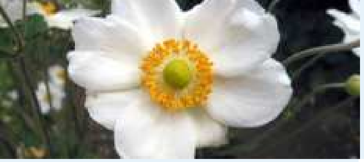
Points critiques

Théorème (J. & F.) *Soit U le bassin immédiat d'un point périodique attractif ou d'un pétale parabolique. Alors il y a un point critique de f dans l'orbite (finie) de U.*

Théorème (Fatou, Mañé 1993) *Soit U un domaine de rotation. Alors chaque composante connexe de sa frontière ∂U est contenue dans l'adhérence de l'orbite d'un point critique récurrent.*

montrer `3.png` et `BAF.exe` avec le lapin gras

Comme une fraction rationnelle de degré d a $2d-2$ points critiques comptés avec multiplicité, il y a au plus $2d-2$ cycles attractifs ou paraboliques.



Points critiques

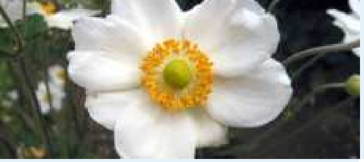
Théorème (J. & F.) *Soit U le bassin immédiat d'un point périodique attractif ou d'un pétale parabolique. Alors il y a un point critique de f dans l'orbite (finie) de U.*

Théorème (Fatou, Mañé 1993) *Soit U un domaine de rotation. Alors chaque composante connexe de sa frontière ∂U est contenue dans l'adhérence de l'orbite d'un point critique récurrent.*

montrer `3.png` et `BAF.exe` avec le lapin gras

Comme une fraction rationnelle de degré d a $2d-2$ points critiques comptés avec multiplicité, il y a au plus $2d-2$ cycles attractifs ou paraboliques.

Théorème (Shishikura, '90) *Il y a au plus $2d-2$ cycles non répulsifs.*



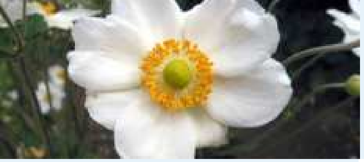
Hyperbolique

Une fraction rationnelle est dite hyperbolique si elle est uniformément répulsive sur l'ensemble de Julia.

Théorème (Fatou) *Une fraction rationnelle de degré ≥ 2 est hyperbolique si et seulement si tous ses points critiques sont dans des bassins attractifs.*

En particulier elle n'a aucune composante parabolique ou de rotation et $F \neq \varnothing$.

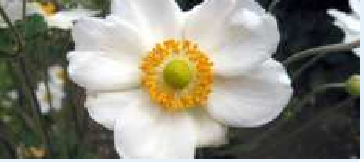
L'hyperbolicité est stable : les fractions rationnelles proches sont encore hyperboliques.



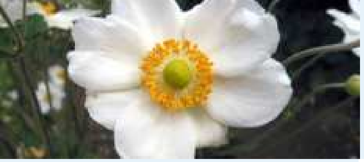
Théorème de non-errance

Théorème (Sullivan 1982) *Toute composante de Fatou est pré-périodique.*

La preuve est une adaptation à la dynamique holomorphe d'un théorème d'Ahlfors chez les groupe Kleiniens. Elle fait intervenir la notion de déformation quasi-conforme.



Cycles neutres irrationnels



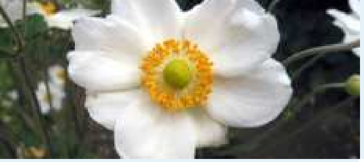
Cycles neutres

Soit $\rho = e^{i2\pi\theta}$ le multiplicateur d'un cycle neutre. On appelle $\theta \in \mathbb{R}$ le nombre de rotation.

Si $\theta \in \mathbb{Q}$ le cycle est qualifié de parabolique (déjà vu).

Si $\theta \notin \mathbb{Q}$ il est appelé indifférent irrationnel.

Théorème (J. & F.) *Un point périodique indifférent irrationnel d'une fraction rationnelle est linéarisable si et seulement si il est dans l'ensemble de Fatou.*



Cycle irrationnels : petit historique

Pfeiffer 1916 : il existe des points fixes indifférents irrationnel non linéarisables pour des fonctions holomorphes locales.

Julia 1919 : croit démontrer qu'un point fixe indifférent d'une fraction rationnelle de degré ≥ 2 n'est jamais linéarisable.

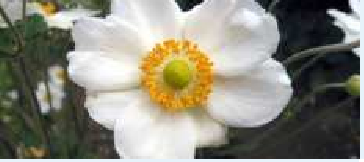
Cremer 1927 : trouve une condition arithmétique explicite sur le développement en fraction continue de θ, résiduelle et suffisante pour qu'un point fixe indifférent de nombre de rotation θ d'une fraction rationnelle de degré d soit non linéarisable.

Siegel 1942 : démontre θ diophantien $\Longrightarrow$ linéarisable pour toute fonction holomorphe.

Brjuno 1965 : trouve une condition plus générale qui $\Longrightarrow$ linéarisable.

Herman 1979 : existence de domaines de rotation annulaires

Yoccoz 1988 : la condition de Brjuno est optimale pour $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z + z^2$



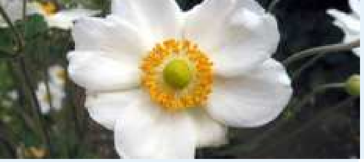
Conjectures

Conjecture (Douady) Tout point périodique neutre irrationnel d'une fraction rationnelle de degré ≥ 2 a un nombre de rotation de type Brjuno.

Conjecture (Yoccoz) Le bord d'un disque de Siegel d'un polynôme/d'une fraction rationnelle est toujours une courbe de Jordan.

Démontré par Shishikura/Zhang Gaofei pour les nombres de rotation de type constant.

Conjecture Soit un polynôme quadratique avec un point fixe de Cremer. Alors l'adhérence de l'orbite critique est homéomorphe à un bouquet de Cantor, de mesure de Lebesgue nulle et de dimension de Hausdorff 2.

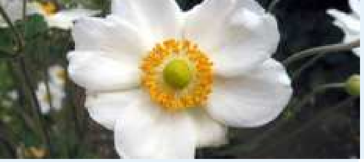


Problèmes

Défi : Dessiner un point de Cremer

Problème : Décrire à homéomorphisme près l'ensemble de Julia de $z^2 + c$ quand il a un point de Cremer.

Problème : Ceux de mesure positive sont-ils ergodiques ?



Outils

Inventaire

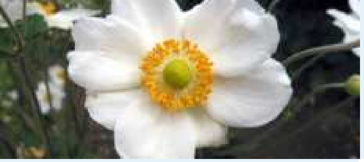
Analyse complexe. Séries entières, méthode de la série majorante, principe du maximum, théorème des résidus, théorèmes d'uniformisation, rigidité, . . .

Théorie géométrique des fonctions. Théorème de Montel, lemme de Schwarz, métrique hyperbolique, fonctions univalentes, théorèmes de distorsion de Koebe, capacité et modules d'anneaux, dérivée Schwarzienne, Lemme de Kahn-Lyubich, . . .

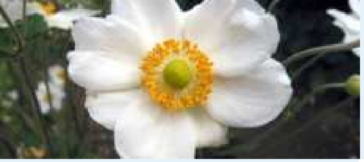
Études combinatoires : qui va où ? Rayons externes, découpages divers, tableaux de Hubbard, nids de Koslovski-Shen-Strien, contrôle de la distorsion, contrôle de l'ensemble post-critique, . . .

Chirurgie quasi-conforme. Ahlfors, Sullivan, Douady, Hubbard, Branner, Shishikura, Fagella, Tan Lei, Yin, . . .

Renormalisations. Sectorielle (Douady, Ghys, Yoccoz). Applications à allure polynomiale (Douady, Hubbard). Renormalisation cylindrique (Yampolsky, Inou, Shishikura).



Familles de fonctions



Hyperbolicité générique

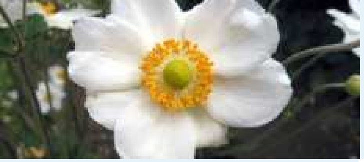
L'ensemble des fractions rationnelles de degré d forme une variété de dimension $2d+1$. Celles qui sont hyperboliques forment un ouvert.

Conjecture (Fatou) Cet ouvert est dense.

La même conjecture est formulée chez les polynômes de degré d.

Voici une autre conjecture, plus forte d'après Mañé, Sad et Sullivan :

Conjecture L'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle ne porte pas de champ de droite invariant, sauf si c'est un exemple de Lattès.

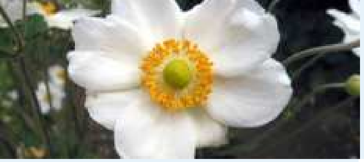


Et chez les polynômes quadratiques

Tout polynôme de degré 2 est conjugué par une application de la forme $z \mapsto az + b$ à un unique polynôme de la forme

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

Parler de la dichotomie, définir M, mentionner son universalité, montrer `4.png`



Conjecture MLC (Douady, Hubbard) M est localement connexe.

Théorème *(Douady, Hubbard) MLC $\Longrightarrow$ la conjecture de Fatou dans la famille $z^2 + c$.*

De gros progrès ont été faits dans MLC. Mentionnons Branner, Hubbard, Yoccoz, Koslovski, Shen, van Strien, Kahn, Lyubich, Avila, ... Mais la preuve est toujours insaisissable.

Théorème *(Shishikura) La dimension de Hausdorff de $\partial M = 2$.*

Problème : Est-ce que ∂M est de mesure de Lebesgue nulle ?

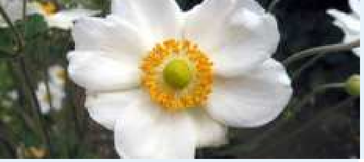


Tableau récapitulatif

Chez les polynômes de degré 2

$\boxed{\text{Conjecture d'hyperbolicité générique de Fatou}}$	$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{Mañe, Sad, Sullivan}}$	Pas de champ de droite invariant
$\Uparrow$ Douady, Hubbard		$\Uparrow$ immédiat
MLC		$\mathrm{Leb}\, J = 0$

Chez les polynômes de degré 2

$\boxed{\text{Conjecture d'hyperbolicité générique de Fatou}}$ $\Longleftrightarrow$ Pas de champ de droite invariant

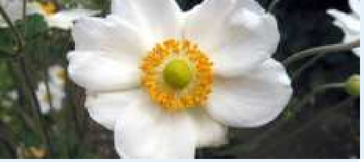
Mañe, Sad, Sullivan

$\Nearrow$ Douady, Hubbard

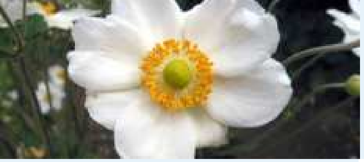
MLC

$\Nwarrow$ immédiat

$\cancel{\mathrm{Leb}\, J = 0}$



Autres problèmes



Plus sur la locale connexité

On possède un candidat de modèle topologique de M. Il lui est homéomorphe si et seulement si MLC.

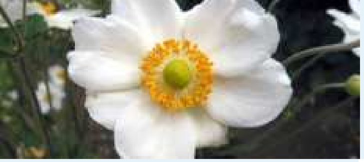
En plus grand degré, on sait que les généralisations M ne sont pas localement connexes.

Problème : comprendre ces ensembles.

Théorème (Roesch, Yin) *Les composantes de Fatou bornées de type attractif ou parabolique des polynômes ont pour bord une courbe de Jordan.*

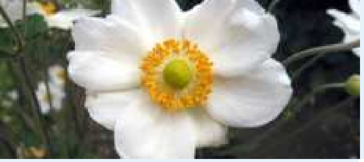
Remarque : Il existe des polynômes pour lesquels on sait que l'ensemble de Julia n'est pas localement connexe. Par exemple tout polynôme avec un point de Cremer.

Problème : Trouver des conditions pour lesquelles le thm. de Roesch-Yin s'étend aux fractions rationnelles.



Autres domaines

Accouplements de polynômes, fonctions entières transcendantes, la dimension supérieure : applications rationnelles de $\mathbb{C}P^n$ dans lui-même, . . .



Autres domaines

Accouplements de polynômes, fonctions entières transcendantes, la dimension supérieure : applications rationnelles de $\mathbb{C}P^n$ dans lui-même, . . .

Par exemple, est-ce que si f est entière et si $f \circ f$ est périodique, alors f est périodique elle-même?