

# Examen

Durée : 3h

Les notes de cours sont autorisées.

L'ensemble des nombres réels modulo 1, aussi dénoté  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , sera appelé le *cercle* dans cet énoncé (cette dénomination est motivée par l'existence d'un homéomorphisme  $x \mapsto \exp(2i\pi x)$  de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  vers le cercle unité de  $S^1$  ; cet homéomorphisme est même un difféomorphisme analytique).

## I. Un théorème d'Arnol'd

Dans tout ce problème,  $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un difféomorphisme (au minimum  $C^1$ ) du cercle qui préserve l'orientation, c'est à dire tel que  $f'(x) > 0$ .

### 1. Le nombre de rotation (1h)

Soit  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  la projection canonique. On admettra qu'il existe un difféomorphisme  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait  $f \circ p = p \circ F$  et  $F(x+1) = F(x) + 1$ . On dit que  $f$  possède un "relevé"  $F$ .

a. Démontrer que le relevé de  $f$  n'est pas unique.

Soit  $d_n(x) = \frac{F^n(x) - x}{n}$  où  $F^n$  désigne la composée.

b. Démontrer

$$(1) \quad F^n(x+1) = F^n(x) + 1$$

$$(2) \quad d_n(x+1) = d_n(x)$$

$$(3) \quad x < y < x+1 \implies F^n(x) < F^n(y) < F^n(x) + 1$$

c. Soit  $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} d_n(x)$  et  $m_n = \inf_{x \in \mathbb{R}} d_n(x)$ . Démontrer que  $M_n < +\infty$ ,  $m_n > -\infty$  et  $M_n - m_n \leq 1/n$ .

d. Démontrer que la suite  $u_n = nM_n$  est sous-additive ( $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ ). Démontrer que  $M_n$  et  $m_n$  convergent et possèdent la même limite.

Cette limite est appelée le *nombre de translation* de  $F$  et noté  $\tau(F)$ .

e. Démontrer que la classe de  $\tau(F)$  modulo  $\mathbb{Z}$  est indépendante du choix du relevé  $F$  de  $f$ .

Cette classe est appelée *nombre de rotation* de  $f$  et est notée  $\rho(f)$ .

f. Démontrer que le nombre de rotation est invariant par conjugaison de  $f$  par un difféomorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  préservant l'orientation, c'est à dire que  $\rho(\phi \circ f \circ \phi^{-1}) = \rho(f)$ .

g. Supposons que  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - (x + t)| \leq \varepsilon$ . Démontrer que  $|\rho(f) - t| \leq \varepsilon$ .

## 2. Fonctions analytiques du cercle (30mn)

On rappelle qu'une fonction d'une variable réelle est dite analytique quand elle possède un développement en série entière (DSE) au voisinage de tout point.

a. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction analytique et 1-périodique ( $g(x + 1) = g(x)$ ). Démontrer que  $g$  possède un prolongement analytique à une bande de la forme

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < r\}.$$

Soit  $\mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  l'ensemble des fonctions 1-périodiques analytiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui ont une extension analytique à  $B_r$ .

On note  $\mathcal{B}_r$  l'ensemble des  $g \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  dont le prolongement  $\tilde{g}$  à  $B_r$  vérifie  $\sup |\tilde{g}| < +\infty$ .

b. Démontrer que  $\mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \bigcap_{u < r} \mathcal{B}_u(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ .

On note  $\mathcal{F}_r$  l'ensemble des fonctions continues, 1-périodiques et dont le développement en série de Fourier  $\sum c_m e^{i2\pi m x}$  vérifie  $\exists A > 0$  tel que  $\forall m \in \mathbb{Z}, |c_m| \leq A e^{-2\pi r|m|}$ .

c. Démontrer que  $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{F}_r$ . Pour cela, étant donnée  $g \in \mathcal{B}_r$ , on remarquera qu'il existe une fonction  $f$  holomorphe telle que  $\tilde{g}(z) = f(e^{2i\pi\theta z})$  (pas la peine de le justifier) et on en déduira que  $|c_m| \leq e^{-2\pi r|m|} \sup |\tilde{g}|$ .

d. Démontrer que  $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ .

## 3. Linéarisation (1h30)

Soit  $t(x) = x + \theta$  et  $\tilde{t}(z) = z + \theta$ . Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème** (Arnol'd). *Soit  $\theta$  un nombre diophantien et  $r > 0$ . Alors il existe  $\varepsilon$  tel que si  $f$  est un difféomorphisme analytique du cercle préservant l'orientation, de nombre de rotation  $\theta$  et possédant un prolongement  $\tilde{f}$  à  $B_r$  vérifiant  $|\tilde{f}(z) - \tilde{t}(z)| < \varepsilon$ , alors  $f$  est analytiquement linéarisable : il existe un difféomorphisme analytique du cercle  $\phi$  préservant l'orientation, tel que  $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = t$ .*

Nous utiliserons pour cela la méthode KAM. Notons  $f(x) = x + \theta + b(x)$ ,  $\phi(x) = x + a(x)$ . L'équation de linéarisation  $\phi \circ f = t \circ \phi$  s'écrit

$$x + \theta + b(x) + a(x + \theta + b(x)) = x + \theta + a(x)$$

c'est à dire

$$a(x) - a(x + \theta + b(x)) = b(x).$$

On la remplace par l'équation plus simple

$$(1) \quad a(x) - a(x + \theta) = b(x) + c$$

où  $c$  est une constante.

Dans la suite,  $f \in \mathcal{B}_r$ . On note

$$N_r(f) = \sup_{z \in B_r} |\tilde{f}(z)|.$$

a. En utilisant les séries de Fourier, démontrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  tels que, l'équation (1) est satisfaite. La valeur de  $c$  est-elle unique? La valeur de  $a$  est-elle unique?

b. Démontrer qu'il y a une unique solution  $(a, c)$  vérifiant  $\int_0^1 a(x) dx = 0$ .

Dans la suite  $(a, c)$  est la solution de l'équation (1) vérifiant  $\int_0^1 a(x)dx = 0$ .

Rappelons que  $\forall \tau \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} x^n n^{\tau-1} < \frac{(\tau-1)!}{(1-x)^\tau}$ .

c. Démontrer que pour tout  $r' < r$ ,

$$N_{r'}(a) \leq \frac{C}{(1 - e^{-2\pi(r-r')})^\tau} N_r(b)$$

et

$$N_{r'}(a') \leq \frac{C}{(1 - e^{-2\pi(r-r')})^{\tau+1}} N_r(b)$$

où  $C$  et  $\tau$  ne dépendent que de  $\theta$ .

Soient  $r_3 < r_2 < r_1 < r$ .

d. Démontrer que si  $r_3 \leq r_2 - N_{r_2}(a)$  alors le domaine de définition de  $\tilde{\phi}^{-1}$  contient  $B_{r_3}$  et que pour tout  $z \in B_{r_3}$ ,  $|\tilde{\phi}^{-1}(z) - z| \leq N_{r_2}(a)$  et  $|\phi^{-1}(z)| \leq r_2$ .

e. Démontrer que si de plus  $r_2 + N_r(b) \leq r_1$  alors

$$\forall z \in B_{r_3}, |\tilde{\phi} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\phi}^{-1}(z) - (z + \theta + c)| \leq N_{r_1}(a') N_r(b).$$

f. Quel est le nombre de rotation de  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ ? En déduire que  $|c| \leq N_{r_1}(a') N_r(b)$ .

On va définir par récurrence des suite de fonctions  $f_n(x) = x + \theta + b_n(x)$  et  $\phi_n = x + a_n(x)$ . On pose  $f_0 = f$  et  $f_{n+1} = \phi_n \circ f_n \circ \phi_n^{-1}$  où  $\phi_n = x + a_n(x)$  et  $(a_n, c_n)$  est la solution de

$$(2) \quad a_n(x) - a_n(x + \theta) = b_n(x) + c_n$$

qui vérifie  $\int_0^1 a_n = 0$ . On pose également

$$\rho_n = r \frac{1 + 1/2^n}{2}.$$

g. Démontrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $N_{\rho_{3n}}(b_n) \leq \varepsilon/2^{3n} \implies N_{\rho_{3(n+1)}}(b_{n+1}) \leq \varepsilon/2^{3(n+1)}$ . Pour cela on posera  $r_3 = \rho_{3n+3}$ ,  $r_2 = \rho_{3n+2}$ ,  $r_1 = \rho_{3n+1}$ ,  $r = \rho_{3n}$  et on utilisera les inégalités démontrées, en prenant bien soin de vérifier les hypothèses.

h. Démontrer que la suite  $\phi_n \circ \dots \circ \phi_0$  converge dans  $\mathcal{B}_{r/2}$ .

i. Conclure.