Examen

Les notes de cours sont autorisées à l'examen.

Rappels:

Une fonction $f : X \to Y$ est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact de Y est compacte.

Le bassin immédiat d'un point périodique attractif a est défini comme la composante connexe contenant a du bassin attractif du cycle. C'est une composante connexe de l'ensemble de Fatou.

Le bassin immédiat d'un pétale parabolique P est défini comme la composante connexe contenant P du bassin attractif de ce pétale. Des pétales distincts ont des bassins immédiats disjoints. C'est également une composante connexe de l'ensemble de Fatou.

I. Dynamique des produits de Blaschke

1. Introduction

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction continue.

a. Montrer que f est propre si et seulement si "$|f(z)| \longrightarrow 1$ quand $|z| \longrightarrow 1$".

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe et propre :

b. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de 0.

Soient $a_1 \in \mathbb{D}, \ldots, a_d \in \mathbb{D}$ les zéros de f, comptés avec multiplicité. Soit la fraction rationnelle

$$g(z) = \prod_{i=1}^{d} \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i} z}.$$

c. Montrer que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et que $|g(z)| \longrightarrow 1$ quand $|z| \longrightarrow 1$.

d. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $|\rho| = 1$ et $f = \rho g$.

On appelle *Produits de Blaschke* (finis) les fonctions ρg. Soit S_1 le cercle unité.

e. Soit une fraction rationnelle envoyant $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et S_1 dans S_1. Montrer que c'est un produit de Blaschke.

2. Dynamique

Soit $R : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ un produit de Blaschke de degré ≥ 2. Soit $\mathbb{D}' = \mathbb{S} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

a. Montrer que R^k est un produit de Blaschke.

b. Montrer que $R(1/\overline{z}) = 1/\overline{R}(z)$.

c. Montrer que $J(R) \subset S_1$.

d. Démontrer que $\forall z \in S_1,\ zR'(z)/R(z) \in \mathbb{R}_+^*$.

e. Si $J(R) = S_1$, démontrer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :
 (1) R possède un point fixe attractif dans $\mathbb{D}$, un dans $\mathbb{D}'$
 (2) R possède un point fixe parabolique dans S_1, de multiplicateur 1, à 2 pétales attractifs

f. Si $J(R) \neq S_1$, démontrer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :
 (1) R possède un point fixe attractif dans S_1
 (2) R possède un point fixe parabolique dans S_1, de multiplicateur 1, à 1 pétale attractif

g. Démontrer qu'il n'y a aucun autre cycle non répulsif (dans les 4 cas).

h. Si $J(R) \neq S_1$, démontrer qu'il ne peut contenir aucun arc du cercle S_1. [Remarque : comme il est parfait, compact, infini, et que ses composantes connexes sont des points, il est alors nécessairement homéomorphe à l'ensemble de Cantor.]

II. L'indice holomorphe

À un point fixe $a \neq \infty$ d'une fonction holomorphe f différente de l'identité au voisinage de a, on associe un *indice holomorphe* défini par

$$I = \oint \frac{dz}{z - f(z)},$$

intégrale prise sur un disque $B(a, \varepsilon)$ avec ε suffisamment petit. Soit $\rho = R'(a)$ le multiplicateur.

a. Si $\rho \neq 1$, calculer l'indice holomorphe. Montrer que c'est un invariant de conjugaison.

b. Si $\rho = 1$, soit m la multiplicité du point fixe a de f. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que que pour n suffisamment grand, $f + \frac{1}{n}$ a exactement m points fixes comptés avec multiplicité dans $B(a, \varepsilon)$ et qu'ils ont des multiplicateur $\neq 1$.

c. En déduire que l'indice holomorphe est aussi un invariant de conjugaison quand $\rho = 1$.

d. Si $\rho = 1$, relier I à l'invariant formel A.

e. Soit une fraction rationnelle R non constante et différente de l'identité. Démontrer que la somme des indices holomorphes de ses points fixes vaut 1.

f. Démontrer que toute fraction rationnelle de degré ≥ 2 possède au moins un point fixe soit répulsif soit de multiplicateur $= 1$.