

Corrigé de l'examen

I. Dynamique des produits de Blaschke

1. Introduction

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction continue.

a. Montrer que f est propre si et seulement si “ $|f(z)| \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow 1$ ”.

Comme f est à valeurs dans \mathbb{D} , $|f(z)| < 1$. L'énoncé “ $|f(z)| \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow 1$ ” se traduit donc “ $\forall r < 1$, $\exists \rho(r) < 1$ tel que ($|z| > \rho(r) \implies |f(z)| > r$)”.

\implies : Soit $r < 1$. L'image réciproque du compact $\overline{B}(0, r) \subset \mathbb{D}$ est un compact de \mathbb{D} . Donc $\exists \rho(r) < 1$ tel que $f^{-1}(\overline{B}(0, r)) \subset \overline{B}(0, \rho(r))$. Par contraposée, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|z| > \rho(r) \implies |f(z)| > r$.

\impliedby : Comme f est continue, l'image réciproque d'un fermé est fermée. Donc l'image réciproque d'un compact K est un fermé de \mathbb{D} . Il suffit maintenant de remarquer que les compacts de \mathbb{D} sont les fermés de \mathbb{D} contenus dans un $\overline{B}(0, r)$ pour un certain $r < 1$. Comme $K \subset \overline{B}(0, r)$, $f^{-1}(K) \subset \overline{B}(0, \rho(r))$ est donc compact.

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe et propre :

b. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de 0.

Pour que f soit constante, il faudrait que \mathbb{D} fut compact. L'image réciproque de 0 est donc discrète¹ par le théorème des zéros isolés. D'autre part elle est compacte puisque f est propre. Un compact discret est nécessairement fini.

Soient $a_1 \in \mathbb{D}, \dots, a_d \in \mathbb{D}$ les zéros de f , comptés avec multiplicité. Soit la fraction rationnelle

$$g(z) = \prod_{i=1}^d \frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z}.$$

c. Montrer que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et que $|g(z)| \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow 1$.

En tant que produit, il suffit de le démontrer pour $g(z) = (z - a)(1 - \bar{a}z)$, où $a \in \mathbb{D}$. On aura reconnu une application de $\text{Mob}(\mathbb{D})$. Si l'on tient à redémontrer les propriétés de ces applications, notons que c'est une fraction rationnelle et qu'elle prend en $z = e^{i\theta}$ la valeur $\frac{u}{\bar{u}} e^{-i\theta}$ où $u = e^{i\theta} - a$, donc $|g(e^{i\theta})| = 1$. Comme g est continue et S_1 compact, on a bien $|g(z)| \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow 1$. La fraction g n'est pas constante et son unique pôle $1/\bar{a}$ est dans \mathbb{D}' . Par le principe du maximum, g est à valeurs dans \mathbb{D} .

d. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $|\rho| = 1$ et $f = \rho g$.

Le quotient f/g a un prolongement holomorphe aux zéros de g . Il a un module qui tend vers 1 quand $|z| \rightarrow 1$. Donc par le principe du maximum, $|f/g| \leq 1$. De même $|g/f| \leq 1$. Comme une application holomorphe non constante est ouverte, c'est que f/g est constante. En faisant tendre $|z|$ vers 1, on voit que cette constante a nécessairement module = 1.

On appelle *Produits de Blaschke* (finis) les fonctions ρg . Soit S_1 le cercle unité.

¹tout point est isolé

e. Soit une fraction rationnelle R envoyant \mathbb{D} dans \mathbb{D} et S_1 dans S_1 . Montrer que c'est un produit de Blaschke.

Par prolongement analytique, il suffit de le démontrer sur \mathbb{D} . D'après ce qui précède, il suffit de prouver que R est propre de \mathbb{D} dans \mathbb{D} . Or elle vérifie, par continuité et par compacité de $S_1 : |z| \rightarrow 1 \implies |R(z)| \rightarrow 1$.

2. Dynamique

Soit $R : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ un produit de Blaschke de degré ≥ 2 . Soit $\mathbb{D}' = \mathbb{S} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

a. Montrer que R^k est un produit de Blaschke.

La fraction rationnelle R envoie \mathbb{D} dans \mathbb{D} et S_1 dans S_1 . Donc R^k aussi. On conclut par la question précédente.

b. Montrer que $R(1/\bar{z}) = 1/\overline{R(z)}$.

Par produit, il suffit de le faire pour $g(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$:

$$g(1/\bar{z}) = \frac{\bar{z}^{-1} - a}{1 - \bar{a}\bar{z}^{-1}} = \frac{1 - a\bar{z}}{\bar{z} - \bar{a}} = \overline{\left(\frac{1 - \bar{a}z}{z - a}\right)} = 1/\overline{g(z)}.$$

c. Montrer que $J(R) \subset S_1$.

Comme $R(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $R^n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, donc la famille $\{R^n\}$ est normale sur \mathbb{D} , donc $\mathbb{D} \subset \mathcal{F}(R)$. De même, par la question précédente, $R(\mathbb{D}') \subset \mathbb{D}'$ donc $\mathbb{D}' \subset \mathcal{F}(R)$. En passant aux complémentaires, $J(R) \subset S_1$.

d. Démontrer que $\forall z \in S_1, zR'(z)/R(z) \in \mathbb{R}_+^*$.

Après calculs, on trouve

$$\frac{zR'(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^d \frac{1 - |a_i|^2}{(z - a_i)(z^{-1} - \bar{a}_i)}$$

Si $z \in S_1$ alors $z^{-1} = \bar{z}$ d'où $(z - a_i)(z^{-1} - \bar{a}_i) = (z - a_i)(\bar{z} - \bar{a}_i) = |z - a_i|^2 > 0$. Comme $a_i \in \mathbb{D}$, $1 - |a_i|^2 > 0$. D'où le résultat.

e. Si $J(R) = S_1$, démontrer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- (1) R possède un point fixe attractif dans \mathbb{D} , un dans \mathbb{D}'
- (2) R possède un point fixe parabolique dans S_1 , de multiplicateur 1, à 2 pétales attractifs

On va utiliser la classification des composantes périodiques de l'ensemble de Fatou. Ici, \mathbb{D} et \mathbb{D}' sont les deux composantes connexes de $\mathcal{F}(R)$ et elles sont toutes les deux fixes. Étant simplement connexes, elles ne peuvent pas être des anneaux de Herman. Pour exclure les disques de Siegel, plusieurs arguments sont possibles. Par exemple on peut remarquer que la restriction de R à \mathbb{D} n'est pas injective puisque tout point de \mathbb{D} possède exactement $d = \deg(R)$ préimages comptées avec multiplicité et qu'elles sont toutes forcément dans \mathbb{D} (car $R(\mathbb{D}') \subset \mathbb{D}'$ et $R(S_1) \subset S_1$). D'après la classification, \mathbb{D} est un bassin attractif immédiat d'un point fixe attractif a appartenant à \mathbb{D} , ou d'un pétale attractif P d'un point ulinefixe parabolique b appartenant à $\partial\mathbb{D}$ et de multiplicateur 1 (lemme de l'escargot).

Dans le premier cas, par symétrie $z \mapsto 1/\bar{z}$, \mathbb{D}' est le bassin attractif immédiat du point fixe attractif $1/\bar{a} \in \mathbb{D}'$.

Dans le deuxième cas, \mathbb{D}' est le bassin parabolique immédiat du pétale symétrique $1/\bar{P}$. Il n'y a pas de place pour un troisième bassin parabolique immédiat. Donc p a exactement 2 pétales attractifs.

f. Si $J(R) \neq S_1$, démontrer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- (1) R possède un point fixe attractif dans S_1
- (2) R possède un point fixe parabolique dans S_1 , de multiplicateur 1, à 1 pétale attractif

Comme il y a un point de S_1 dans $\mathcal{F}(R)$, et donc tout un voisinage de ce point, \mathbb{D} et \mathbb{D}' sont inclus dans la même composante connexe de $\mathcal{F}(R)$. Donc il n'y a qu'une seule composante connexe de l'ensemble de Fatou. Comme elle contient des points critiques (tous en fait), elle n'est pas un anneau de Herman ni un disque de Siegel. C'est donc un bassin attractif ou parabolique immédiat associé à un point fixe b attractif ou parabolique de multiplicateur 1. Si ce point était dans \mathbb{D} ou dans \mathbb{D}' , son symétrique aurait également un bassin immédiat, nécessairement disjoint. Or il n'y a plus de place. Donc $b \in S_1$. Il n'a qu'un pétale car l'ensemble de Fatou n'a qu'une composante connexe.

g. Démontrer qu'il n'y a aucun autre cycle non répulsif (dans les 4 cas).

Démo 1 : Comme $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}' \subset \mathcal{F}(R)$, il n'y a pas de place pour d'autres composantes de l'ensemble de Fatou (ce sont des ouverts). Donc il n'y a pas d'autre cycle attractif, parabolique, ou indifférent irrationnel linéarisable. Pour éliminer les indifférents irrationnels non linéarisables, soit par l'absurde un point c d'un tel cycle. Si $c \in \mathbb{D}$ alors le cycle est $\subset \mathbb{D}$ et comme R contracte la métrique de Poincaré de \mathbb{D} (on a vu que ce n'est pas un isomorphisme de \mathbb{D}), le cycle devrait nécessairement être attractif. De même si $c \in \mathbb{D}'$. Si $c \in S_1$, soit k sa période. Or d'après la question d. appliquée à R^k , $R^{k'}(c)$ est réel strictement positif. Dans tous les cas c'est absurde.

Démo 2 : D'après la question d. il n'y a pas de point critique sur S_1 . Tous les points critiques sont dans \mathbb{D} ou \mathbb{D}' . S'il y avait un autre cycle attractif ou parabolique, il devrait capturer l'orbite d'au moins un point critique. C'est donc impossible. Tous les points critique ont une orbite tendant vers a ou $1/\bar{a}$ dans le cas (1), vers p dans le cas (2). S'il y avait un cycle indifférent irrationnel non linéarisable c , alors d'après un théorème du cours n'importe quel point de ce cycle serait inclus dans l'adhérence de l'ensemble post-critique. Il faudrait que c soit égal à a , $1/\bar{a}$ ou p . C'est impossible. S'il y avait un cycle indifférent irrationnel linéarisable, le bord du disque de Siegel associé à un point de ce cycle serait inclus dans l'adhérence de l'ensemble post-critique, donc comme les points critiques sont dans $\mathcal{F}(R)$, dans $\{a, 1/\bar{a}\}$ ou dans $\{p\}$. Or ce bord possède une infinité de points (sinon, par exemple, le disque de Siegel serait le complémentaire d'un ensemble fini et $J(R)$ serait fini, or on a vu que $J(R)$ est infini). C'est absurde.

h. Si $J(R) \neq S_1$, démontrer qu'il ne peut contenir aucun arc du cercle S_1 . [Remarque : comme il est parfait, compact, infini, et que ses composantes connexes sont des points, il est alors nécessairement homéomorphe à l'ensemble de Cantor.]

Comme $J(R) \neq S_1$, et comme $\mathcal{F}(R)$ est ouvert, $\mathcal{F}(R) \cap J$ contient un certain arc $A \subset S_1$. Soit $z = e^{i\theta} \in S_1$ et $\varepsilon > 0$. Soit U un voisinage de z tel que $U \cap S_1$ soit égal à l'arc $B = \{e^{i\alpha} \mid \theta - \varepsilon < \alpha < \theta + \varepsilon\}$. Comme $z \in J(R)$, d'après le cours $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k(U)$ omet au plus 2 points de la sphère de Riemann (l'ensemble exceptionnel). Donc

il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset R^k(U)$. Or les points de U qui sont dans \mathbb{D} étant envoyés dans \mathbb{D} et ceux dans \mathbb{D}' dans \mathbb{D}' . Donc c'est que $A \subset R^k(B)$. Donc B contient des points de l'ensemble de Fatou (qui, rappelons, est totalement invariant par R).

II. L'indice holomorphe

À un point fixe $a \neq \infty$ d'une fonction holomorphe f différente de l'identité au voisinage de a , on associe un *indice holomorphe* défini par

$$I = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{z - f(z)},$$

intégrale prise sur un disque $B(a, \varepsilon)$ avec ε suffisamment petit. Soit $\rho = R'(a)$ le multiplicateur.

a. Si $\rho \neq 1$, calculer l'indice holomorphe. Montrer que c'est un invariant de conjugaison.

L'expression est évidemment invariante par conjugaison par une translation. Cela allègera les notations de supposer $a = 0$. Alors $f(z) = \rho z + \mathcal{O}(z^2)$, d'où

$$\frac{1}{z - f(z)} = \frac{1}{(1 - \rho)z + \mathcal{O}(z^2)} = \frac{1}{z(1 - \rho)}(1 + \mathcal{O}(z))^{-1} = \frac{1}{(1 - \rho)z} + \mathcal{O}(1).$$

D'après la formule des résidus, $I = 1/(1 - \rho)$. Comme ρ est un invariant de conjugaison, I l'est également.

b. Si $\rho = 1$, soit m la multiplicité du point fixe a de f . Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que que pour n suffisamment grand, $f + \frac{1}{n}$ a exactement m points fixes comptés avec multiplicité dans $B(a, \varepsilon)$ et qu'ils ont des multiplicateur $\neq 1$.

Évidemment, $f + \frac{1}{n}$ ne fixe plus a . Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, pour que $f(z) - z$ ne s'annule qu'en a . D'après le théorème de Rouché, pour n assez petit, $f(z) + \frac{1}{n} - z$ possède le même nombre de racines comptées avec multiplicité, dans $B(0, \varepsilon)$. Il se trouve que $(f + \frac{1}{n})' = f'$, donc les multiplicateurs seront $\neq 1$ si ε a été choisi suffisamment petit pour que f' ne vale 1 qu'en a sur $B(a, \varepsilon)$. Un tel ε existe par le théorème des zéros isolés (appliqué à $f' - 1$).

c. En déduire que l'indice holomorphe est aussi un invariant de conjugaison quand $\rho = 1$.

Pour n assez grand, l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{f(z) + \frac{1}{n} - z}$ prise sur le contour $\partial B(a, \varepsilon)$ est égale, toujours par la formule des résidus, à la somme des indices holomorphes de ces m points pour $f + \frac{1}{n}$, et tend (par convergence uniforme sous le signe intégrale) vers l'indice holomorphe de f en a . Soit $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ une conjuguée de f . Alors $g_n = \phi \circ (f + \frac{1}{n}) \circ \phi^{-1}$ tend vers g . Les m images par ϕ des m points fixes de $f + \frac{1}{n}$ sont des points fixes de g , de même multiplicateur $\neq 1$ donc de même indice holomorphe. Donc l'indice holomorphe de g (en $\phi(a)$) est égal à celui de f (en a) par passage à la limite.

d. Si $\rho = 1$, relier I à l'invariant formel A .

Comme f est conjuguée à $z + z^{q+1} + Az^{2q+1} + \mathcal{O}(z^{2q+2})$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{z - z - z^{q+1} - Az^{2q+1} + \mathcal{O}(z^{2q+2})} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{-dz}{z^{q+1}(1 + Az^q + \mathcal{O}(z^{q+1}))} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{-dz}{z^{q+1}} (1 - Az^q + \mathcal{O}(z^{q+1})) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\oint \frac{-dz}{z^{q+1}} + A \oint \frac{dz}{z} + \oint dz \text{ holo}(z) \right) \\ &= A. \end{aligned}$$

e. Soit une fraction rationnelle R non constante et différente de l'identité. Démontrer que la somme des indices holomorphes de ses points fixes vaut 1.

Plaçons nous dans une carte de la sphère de Riemann où ∞ n'est pas un point fixe ($R \neq \text{id}$ donc c'est possible). Alors la somme des indices holomorphes est égale à l'intégrale $I' = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{z - f(z)}$ sur $\partial B(0, R)$ (orienté dans le sens trigonométrique) pour tout R suffisamment grand. En prenant $z = Re^{i\theta}$ on a

$$I' = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{Re^{i\theta} - f(Re^{i\theta})} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\theta}{1 - f(Re^{i\theta})/Re^{i\theta}}$$

et en faisant $R \rightarrow +\infty$, on voit que l'intégrale tend vers 1. (On pouvait aussi faire un développement en série de Laurent).

f. Démontrer que toute fraction rationnelle de degré ≥ 2 possède au moins un point fixe soit répulsif soit de multiplicateur = 1.

Notons que R n'est ni constante ni l'identité, et qu'elle possède $\deg(R) + 1 \geq 3$ points fixes comptés avec multiplicité. Supposons qu'il n'y ait pas de point fixe de multiplicateur = 1, c'est à dire aucun point fixe multiple. Alors il y a au moins 3 points fixes. Remarquons que $|\rho| > 1 \iff \text{Re}(1/(1 - \rho)) < 1/2$. Comme la somme des indices holomorphes est égale à 1, au moins un des indices a une partie réelle $\leq 1/3$ donc en particulier $< 1/2$. C'est à dire $|\rho| > 1$.