

Corrigé du devoir maison

Les corrections d'erreurs d'énoncé (humbles excuses) sont encadrées.

I. Théorème de Baire, petits cycles et points de Crémer

Soit P un polynôme de degré ≥ 2 tel que : $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. Soit $P_\theta(z) = e^{2i\pi\theta}P(z)$.

a. Soit p/q irréductible. Démontrer en appliquant le théorème de Rouché à $P_\theta^q(z) - z$ que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ avec $\boxed{0 < |\theta - \frac{p}{q}| < \eta}$, alors P_θ possède un cycle contenu dans $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$.

D'après le cours sur les points paraboliques, $P_{p/q}^q(z) - z$ possède en $z = 0$ une racine de multiplicité $1 + kq$ avec $k > 0$. Soit $\varepsilon' < \varepsilon$ tel que $P_{p/q}^q(z) - z$ ne s'annule pas sur $\partial B(0, \varepsilon')$. Soit alors $\mu = \inf |P_{p/q}^q(z) - z|$ sur $\partial B(0, \varepsilon')$. L'application $(\theta, z) \mapsto P_\theta^q(z) - z$ est continue, et $\partial B(0, \varepsilon')$ compact, donc $\exists \eta > 0$ tel que $|\theta - p/q| < \eta \implies |(P_{p/q}^q(z) - z) - (P_\theta^q(z) - z)| < \mu$ (raisonner par l'absurde). Par le théorème de Rouché, P_θ a alors $1 + kq$ zéros dans $B(0, \varepsilon')$. Si on demande en plus que $0 < |\theta - p/q| < 1/q$, alors 0 est un point fixe simple de P_θ^q , donc P_θ^q a kq zéros dans $B(0, \varepsilon') \setminus \{0\}$. Donc pour tout θ assez proche de p/q et différent de p/q , il existe un point périodique de P_θ dans $B(0, \varepsilon') \setminus \{0\}$.

Cela aurait suffi pour la suite du problème, mais on voulait en fait tout un cycle, et pas juste un point périodique. Il suffit pour cela de diminuer ε' , de sorte à garantir que les q premiers itérés du point périodique restent dans $B(0, \varepsilon)$.

b. Démontrer en utilisant le théorème de Baire qu'il existe un sous-ensemble Θ de \mathbb{R} , dense, tel que $\forall \theta \in \Theta, P_\theta$ possède pour tout $\varepsilon > 0$ un cycle contenu dans $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$.

Notons $\eta(p/q, \varepsilon)$ le nombre η trouvé au a. L'ensemble

$$U_n = \bigcup_{p/q \in \mathbb{Q}} \{\theta \in \mathbb{R} \mid 0 < |\theta - p/q| < \eta(p/q, 1/n)\}$$

est ouvert et dense, et l'ensemble $\Theta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ convient, le théorème de Baire donnant la densité de Θ .

c. En déduire l'existence de polynômes ayant un point fixe de Crémer (c'est à dire indifférent irrationnel et non linéarisable).

Étant dense, Θ est en particulier non vide. N'importe quel $\theta \in \Theta$ donne un point de Crémer. En effet $\Theta \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si le point était linéarisable, il aurait un voisinage V de 0 sur lequel l'application est conjuguée à une rotation. Comme θ est irrationnel, il ne pourrait pas y avoir d'autre point périodique que 0 dans V .

II. Métrique de Poincaré et ensembles de Julia hyperboliques

Remarque L'auteur de ce problème a supposé implicitement que U et V étaient connexes. Or cela demande des étapes supplémentaires.

Soit R une fraction rationnelle de degré ≥ 2 et vérifiant l'hypothèse suivante : tous ses points critiques sont dans des bassins attractifs.

[...]

a. Construire un compact K tel que :

- $K \cap J = \emptyset$
- Tout cycle attractif de J est à l'intérieur de K
- $R(K) \subset K$
- $R^{-1}(\mathbb{S} \setminus K)$ est connexe

(Il est sous-entendu que *superattractif* est un cas particulier d'*attractif*.) D'après le cours, il n'y a qu'un nombre fini k de cycles attractifs. Sélectionnons un point z_i dans chacun ($0 < i < k - 1$). Soit p_i sa période. Munissons \mathbb{S} de la métrique sphérique. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $R^{p_i}(\overline{B}(z_i, \varepsilon)) \subset \overline{B}(z_i, \varepsilon)$ car le cycle est attractif. On pose alors

$$K = \bigcup_{i=0}^k \bigcup_{n=0}^{p_i-1} R^n(\overline{B}(z_i, \varepsilon))$$

qui vérifie alors $R(K) \subset K$, K compact, l'intérieur de K contient les cycles attractifs. On voit que K est inclus dans tout voisinage de la réunion des cycles attractifs, pour ε suffisamment petit. Comme les cycles attractifs sont dans l'ensemble de Fatou qui est ouvert, pour ε assez petit, $K \cap J = \emptyset$.

Connexité de $R^{-1}(\mathbb{S} \setminus K) = \mathbb{S} \setminus R^{-1}(K)$. Pour ε suffisamment petit, les $R^n(\overline{B}(z_i, \varepsilon))$ sont 2 à 2 disjoints.

On va utiliser un nombre fini de fois le lemme suivant, qui permet sous des hypothèses simples de conserver la connexité quand on retire un ensemble A à un connexe X .

Lemme. *Si X est un espace topologique, $A \subset V \subset X$, A fermé, V ouvert, si X et $V \setminus A$ sont connexes, alors $X \setminus A$ est connexe.*

L'idée est alors de retirer une par une les composantes connexes de $R^{-1}(K)$ à \mathbb{S} . On peut s'en sortir avec ε assez petit, mais il y a des complications.

Pour les éviter, on peut poser

$$K = \bigcup_{i=0}^k \bigcup_{n=0}^{p_i-1} R^{-n}(\overline{B}(z_i, \varepsilon))$$

pour lequel il est plus facile de vérifier l'hypothèse du lemme pour chaque composante connexe de $R^{-1}(K)$, quand ε est suffisamment petit (elle sont toutes homéomorphes à des disques !).

- b. Soit L la réunion de K et des orbites $\{R^k(c) \mid k \in \mathbb{N}\}$ des points critiques c de R . Démontrer que L vérifie encore les hypothèses du a.

Compacité de L : remarquer que les orbite critiques tendent vers les cycles, qui sont dans K . Ensuite, les trois premiers points sont faciles à vérifier.

La connexité du complémentaire est préservée : on n'a en effet retiré qu'un nombre fini de points puisque les cycles sont contenus dans l'intérieur de K . On peut appliquer le lemme mentionné plus haut.

c. Soit $V = \mathbb{S} \setminus L$ et $U = R^{-1}(V)$. Soit $p_V : \tilde{V} \rightarrow V$ le revêtement universel de V et $p_U : \tilde{U} \rightarrow U$ celui de U . Démontrer qu'il existe un isomorphisme de surfaces de Riemann $\phi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{V} \\ p_U \downarrow & & \downarrow p_V \\ U & \xrightarrow{R} & V \end{array}$$

Remarque. Cette question servait à dire que R est une isométrie de la métrique de Poincaré de U vers celle de V . Tout cela a été vu dans le cours.

Appliquer le théorème de relèvement pour relever $R \circ p_U$, par le revêtement p_V . C'est possible car \tilde{U} est simplement connexe. De plus, R n'a pas de valeur critique dans V , donc $R : R^{-1}(V) \rightarrow V$ est un revêtement, donc $R \circ p_U$ aussi, donc son relevé est un revêtement. Comme \tilde{V} est simplement connexe, un revêtement est nécessairement trivial. Donc on a un homéomorphisme, et même un isomorphisme de surface de Riemann (tout est analytique).

Remarque. Comme U est connexe d'après b., son image V l'est également (R est surjective donc on a bien $V = R(U)$). Donc on peut bien parler de leurs revêtement universels.

d. En utilisant les métriques de Poincaré de U et V , en déduire que R est hyperbolique.

Justifions d'abord que U et V sont hyperboliques. En effet, ils évitent tous les deux un ouvert de \mathbb{S} , par exemple un voisinage de n'importe quel point d'un cycle attractif (et il y a au moins un cycle attractif, car il y a des points critiques, et qu'on a supposé qu'ils tendent tous vers des cycles attractifs).

Notons maintenant que $U \subset V$, car $R(L) \subset L$ donc $L \subset R^{-1}(L)$.

On a vu au c. que R envoie la métrique de Poincaré de U sur celle de V .

On veut ensuite appliquer le théorème de Pick à l'inclusion de U dans V , c'est à dire à la restriction $\text{id} : U \rightarrow V$. Elle sera contractante en tout point (pour les métriques de Poincaré respectives) à condition que $V \neq U$, ce qui semble raisonnable mais n'est pas immédiat. Une astuce permet d'exclure l'égalité par l'absurde: en effet, on aurait $R : U \rightarrow U$ qui serait une isométrie pour la métrique de Poincaré de U . Or U contient l'ensemble de Julia J de R , qui lui-même contient des points répulsifs. Contradiction.

La restriction de id de J dans lui-même est donc contractante en tout point, si on met la métrique de U au départ et celle de V à l'arrivée. Elle est donc expansive si on les met dans l'autre sens.

Conclusion, pour la métrique de Poincaré de U , R est expansive sur J .

III. Uniformisation et anneaux

[...]

a. Démontrer que tout élément sans point fixe h du groupe $\text{Möb}(\mathbb{H})$ est conjugué, dans ce même groupe, à un et un seul élément de la liste suivante

- $z \mapsto z + 1$
- $z \mapsto z - 1$
- $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 1$

(penser aux points fixes de h dans \mathbb{S}).

Existence. Dans \mathbb{S} , une homographie possède au moins un point fixe. Comme h est réelle, le conjugué d'un point fixe est encore fixe, donc comme h n'a pas de point fixe dans \mathbb{H} , elle n'a pas non plus de point fixe dans le demi-plan inférieur. Donc h possède au moins un point fixe ζ dans \mathbb{R} . Quitte à conjuguer h par une application de Möbius réelle ϕ de déterminant > 0 et envoyant ce point sur ∞ (c.à.d. remplacer h par $\phi \circ h \circ \phi^{-1}$), par exemple $\phi(z) = 1/(\zeta - z)$, on peut se ramener au cas où h fixe l'infini. Alors h est affine : $h(z) = az + b$.

- Si $a = 1$, alors $h(z) = z + b$. Comme $h \neq \text{id}$, $b \neq 0$. Le changement de variable $\phi(z) = z/b$ conjugue h à $z \mapsto z + 1$. Si $b > 0$, alors $\phi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$. Si $b < 0$, alors $\phi \notin \text{Möb}(\mathbb{H})$ et il faut prendre à la place $\phi(z) = -z/b$, qui conjugue h à $z \mapsto z - 1$.
- Si $a \neq 1$, h fixe $b/(1 - a) \in \mathbb{R}$. En conjuguant h par la translation de $-b/(1 - a)$, on est ramené au cas où h fixe 0 et ∞ . Alors $h(z) = \lambda z$. Comme h envoie \mathbb{H} dans \mathbb{H} , $\lambda > 0$ et comme $h \neq \text{id}$, $\lambda \neq 1$. Si $\lambda < 1$, on peut conjuguer h à $z \mapsto \lambda^{-1}z$ par $\phi(z) = -1/z$ (*attention* à choisir des conjugaisons qui sont dans $\text{Möb}(\mathbb{H})$, c.à.d. qui préservent \mathbb{H} ; c'est bien le cas pour $\phi(z) = -1/z$, pas pour $z \mapsto 1/z$). On est donc ramené au cas $\lambda > 1$.

Unicité. Deux applications conjuguées ont le même nombre de points fixes, donc $z + 1$ n'est pas conjugué à λz . De même $z - 1$ n'est pas conjugué à λz .

Supposons que $\phi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ conjugue $z + 1$ à $z - 1$. Alors ϕ fixe l'infini, donc est affine : $\phi(z) = az + b$. On voit que $\phi(\phi^{-1}(z) + 1) = z + a$. Donc $a = -1$. Dans ce cas $\phi(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$ donc $\phi \notin \text{Möb}(\mathbb{H})$. Contradiction.

Si λz est conjugué à $\lambda' z$, alors la conjugaison ϕ doit préserver les points fixes. Donc

- Soit ϕ permute 0 et ∞ , auquel cas $\phi(z) = c/z$ pour un certain $c \neq 0$. Alors $z \mapsto \lambda z$ est conjugué à $z \mapsto \lambda^{-1}z$, d'où $\lambda' = \lambda^{-1}$. Si $\lambda > 1$ et $\lambda' > 1$ c'est impossible.
- Soit ϕ fixe 0 et ∞ , auquel cas $\phi(z) = c/z$ pour un certain $c \neq 0$. Alors $\lambda' = \lambda$.

[...]

On notera B_h la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < h\}$, avec $h \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

On notera C_h le cylindre B_h/\mathbb{Z} .

b. Quelle est l'image par $z \mapsto \exp z$ de la bande B_π ?

C'est l'ensemble des points de \mathbb{C}^* d'argument entre 0 et π , c'est à dire \mathbb{H} .

c. Donner un sous-groupe G de $\text{Möb}(\mathbb{H})$ tel que $\mathbb{H}/G \simeq C_h$.

Si $h < +\infty$, on considère la composition

$$z \in B_h \mapsto \frac{\pi}{h}z \in B_\pi \mapsto \exp\left(\frac{\pi}{h}z\right) \in \mathbb{H},$$

qui est bijective. Alors $z \mapsto z + 1$ est conjuguée à $z \mapsto e^{\pi/h}z$. Donc $C_h = B_h/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{H}/G$ où G est le groupe engendré par $z \mapsto e^{\pi/h}z$.

Si $h = \infty$, alors C_h est déjà présenté sous la forme \mathbb{H}/G , avec G le groupe engendré par $z \mapsto z + 1$.

d. Soient G et G' deux sous-groupes de $\text{Möb}(\mathbb{H})$ agissant proprement discontinuement. Démontrer que la surface de Riemann \mathbb{H}/G est isomorphe à \mathbb{H}/G' si et seulement si G et G' sont deux sous-groupes conjugués de $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

L'isomorphisme ψ de surface de Riemann se relève au niveau des revêtements universels en une application holomorphe $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{\mathbb{H}} \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \mathbb{H}/G & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{H}/G' \end{array}$$

Pour justifier que ϕ est un homéomorphisme, donc un isomorphisme, on peut par exemple noter que le relevé d'un revêtement étant un revêtement, ϕ est un revêtement, nécessairement trivial puisqu'au dessus d'un espace simplement connexe. Ou alors on invoque l'unicité du revêtement universel.

Maintenant, G est le groupe d'automorphismes du revêtement p_1 et G' celui de p_2 . On voit alors que $\forall g \in G, \phi \circ g \circ \phi^{-1} \in G'$. Donc $\phi G \phi^{-1} \subset G'$. De façon symétrique, $\phi^{-1} G' \phi \subset G$. Donc $G' = \phi G \phi^{-1}$: les deux sous-groupes G et G' sont conjugués dans $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

e. Supposons que $h, h' \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ et que les surfaces de Riemann C_h et $C_{h'}$ sont isomorphes. Démontrer que $h = h'$.

D'après c., $C_h \simeq \mathbb{H}/G$ où G est engendré par $g : z \mapsto e^{\pi/h}z$ ou par $g : z \mapsto z + 1$ si $h = +\infty$, et $C_{h'} \simeq \mathbb{H}/G'$ où G' est engendré par $g' : z \mapsto e^{\pi/h'}z$ ou $z + 1$ si $h' = +\infty$.

D'après d., G et G' sont conjugués dans $\text{Möb}(\mathbb{H})$. Le groupe G est isomorphe à \mathbb{Z} , et ses générateurs sont g et g^{-1} . Donc g' est conjugué à g ou à g^{-1} dans $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

On conclut avec l'unicité dans a. (utiliser le fait que $e^{\pi/h} > 1$ et $e^{\pi/h'} > 1$; pour traiter le cas où g' est conjuguée à g^{-1} , noter que $z \mapsto e^{\pi/h}z$ est conjugué dans $\text{Möb}(\mathbb{H})$ à son inverse).

On rappelle que le groupe d'automorphismes G du revêtement universel $p : \tilde{S} \rightarrow S$ est isomorphe au π_1 de S , et que $\tilde{S}/G \simeq S$.

f. Dédurre de tout cela une classification à isomorphisme près des surfaces de Riemann anneaux.

Classification. Toute surface de Riemann "anneau" est isomorphe à une et une seule des surfaces de Riemann de la liste suivante :

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z}, \mathbb{H}/\mathbb{Z}, C_h \ (0 < h < +\infty).$$

Existence. Soit S une telle surface de Riemann. \tilde{S} est isomorphe à \mathbb{S}, \mathbb{C} ou \mathbb{H} .

Le groupe G est isomorphe au $\pi_1(S)$, supposé isomorphe à \mathbb{Z} . Donc il est monogène : $G = \langle g \rangle$.

- Si $\tilde{S} \simeq \mathbb{H}$, comme g est sans point fixe (car l'action est proprement discontinue), il est d'après le a. conjugué dans $\text{Möb}(\mathbb{H})$ à $z + 1$ ou à λz pour un certain $\lambda > 1$. Donc S est isomorphe à $C_{+\infty} = \mathbb{H}/\mathbb{Z}$ ou (d'après c.) à C_h avec $h = \frac{\pi}{\log \lambda}$.
- Si $\tilde{S} \simeq \mathbb{S}$, alors $S \simeq \mathbb{S}$ (voir le cours : ça vient du fait qu'il n'y a pas d'isomorphisme de \mathbb{S} sans point fixe, donc $G = \{\text{id}\}$) et donc $\pi_1(S) = \{0\} \neq \mathbb{Z}$.
- Si $\tilde{S} \simeq \mathbb{C}$, alors g étant sans point fixe, c'est une translation, donc conjuguée par une application affine à $z \mapsto z + 1$. Donc $S \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Unicité. Cela découle de e. et du fait que $\mathbb{C} \not\simeq \mathbb{H}$.