Devoir maison facultatif

Les trois parties sont indépendantes. Vous êtes libres d'en faire le nombre que vous désirez.

I. Théorème de Baire, petits cycles et points de Crémer

Soit P un polynôme de degré ≥ 2 tel que : $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. Soit $P_\theta(z) = e^{2i\pi\theta} P(z)$.

a. Soit p/q irréductible. Démontrer en appliquant le théorème de Rouché à $P_\theta^q(z) - z$ que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ avec $|\theta - \frac{p}{q}| < \eta$, alors P_θ possède un cycle contenu dans $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$.

b. Démontrer en utilisant le théorème de Baire qu'il existe un sous-ensemble Θ de $\mathbb{R}$, dense, tel que $\forall \theta \in \Theta$, P_θ possède pour tout $\varepsilon > 0$ un cycle contenu dans $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$.

c. En déduire l'existence de polynômes ayant un point fixe de Crémer (c'est à dire indifférent irrationnel et non linéarisable).

II. Métrique de Poincaré et ensembles de Julia hyperboliques

Soit R une fraction rationnelle de degré ≥ 2 et vérifiant l'hypothèse suivante : tous ses points critiques sont dans des bassins attractifs.

Le but est de démontrer que R est *hyperbolique*. La notion de système hyperbolique existe dans un cadre plus général. Dans celui de l'itération rationnelle en dimension compexe 1 dans lequel nous travaillons, la définition est la suivante : R est hyperbolique si et seulement s'il existe une métrique riemannienne ρ sur un ouvert contenant J pour laquelle R a en tout point de J une dérivée expansive par rapport à ρ[1]. Par compacité, le taux de dilatation est alors minoré sur J par une certaine constante $k > 1$.

a. Construire un compact K tel que :

- $K \cap J = \varnothing$
- Tout cycle attractif de J est à l'intérieur de K
- $R(K) \subset K$

b. Soit L la réunion de K et des orbites $\left\{R^k(c) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ des points critiques c de R. Démontrer que L vérifie encore les hypothèses du *a*.

[1] On note $T_z\mathbb{S}$ l'espace tangent en z à la sphère de Riemann $\mathbb{S}$ et $D_zR : T_z\mathbb{S} \to T_{R(z)}\mathbb{S}$ l'application linéaire tangente à R en z. On dit que la dérivé est expansive en z s'il existe $\lambda > 1$ tel que pour tout vecteur $v \in T_z\mathbb{S}$, on a $\|(D_zR)(v)\| \geq \lambda\|v\|$ où $\|v\|$ est la norme du vecteur $v \in T_z\mathbb{S}$ pour la métrique riemannienne, et $\|(D_zR)(v)\|$ est celle du vecteur $(D_zR)(v) \in T_{R(z)}\mathbb{S}$.

c. Soit $V = \mathbb{S} \setminus L$ et $U = R^{-1}(V)$. Soit $p_V : \widetilde{V} \to V$ le revêtement universel de V et $p_U : \widetilde{U} \to U$ celui de U. Démontrer qu'il existe un isomorphisme de surfaces de Riemann $\phi : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_U"'] & \widetilde{V} \arrow[d, "p_V"] \\ U \arrow[r, "R"'] & V \end{tikzcd}$$

d. En utilisant les métriques de Poincaré de U et V, en déduire que R est hyperbolique.

III. Uniformisation et anneaux

On rappelle que Möb($\mathbb{H}$) est l'ensemble des homographies complexes à coefficients réels de déterminant positif, plus précisément l'ensemble de leurs restrictions à $\mathbb{H}$.

a. Démontrer que tout élément sans point fixe h du groupe Möb($\mathbb{H}$) est conjugué, dans ce même groupe, à un et un seul élément de la liste suivante

- $z \mapsto z + 1$
- $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 1$

(penser aux points fixes de h dans $\mathbb{S}$).

Dans ce problème, on appelle *anneau* toute surface de Riemann dont le π_1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

On rappelle qu'un groupe G d'automorphismes d'une surface de Riemann X qui agit proprement discontinument (tout $x \in X$ a un voisinage ouvert V tel que $g(V) \cap V = \varnothing$ pour tout $g \neq \mathrm{id}$) définit une surface de Riemann quotient X/G telle que la projection canonique $x \in X \mapsto G.x \in X/G$ est un revêtement et est analytique, (une carte étant donnée par V).

On notera B_h la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < h\}$, avec $h \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

On notera C_h le cylindre $B_h/\mathbb{Z}$.

b. Quelle est l'image par $z \mapsto \exp z$ de la bande B_π ?

c. Donner un sous-groupe G de Möb($\mathbb{H}$) tel que $\mathbb{H}/G \simeq C_h$.

d. Soient G et G' deux sous-groupes de Möb($\mathbb{H}$) agissant proprement discontinument. Démontrer que la surface de Riemann $\mathbb{H}/G$ est isomorphe à $\mathbb{H}/G'$ si et seulement si G et G' sont deux sous-groupes conjugués de Möb($\mathbb{H}$).

e. Supposons que $h, h' \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ et que les surfaces de Riemann C_h et $C_{h'}$ sont isomorphes. Démontrer que $h = h'$.

On rappelle que le groupe d'automorphismes G du revêtement universel $p : \widetilde{S} \to S$ est isomorphe au π_1 de S, et que $\widetilde{S}/G \simeq S$.

f. Déduire de tout cela une classification à isomorphisme près des surfaces de Riemann anneaux.