

Projet

M2 MApi3, module Calcul Scientifique

Équations de réaction-diffusion - Jeu de données initiales

1 Équation de FitzHugh-Nagumo modifiée

Attention : la diffusion est modifiée par rapport à ce qui est indiqué dans le sujet.

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) + (u(1 - u)(u - a) - v)/\varepsilon, \\ \partial_t v(t, x) = \gamma u - \beta v, \end{cases}$$

avec $a = 0.1$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 1$, $\beta = 0.5$. Simulation sur le domaine $(x, y) \in [-20, 20]^2$ avec la donnée initiale

$$u(t = 0, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(1 + \exp(4(|x| - 5)))^2} - \frac{1}{(1 + \exp(4(|x| - 1)))^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 5, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$v(t = 0, x, y) = \begin{cases} 0.15 & \text{si } x < 1 \text{ et } y > -10, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La solution $u(t, x, t)$ obtenue à $t = 5$ avec FreeFem++ est



FIGURE 1 – Solution finale de l'équation de FitzHugh-Nagumo modifiée à $t = 5$

2 Équation du Brusselator

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = D_u \Delta u(t, x) + a - (b + 1)u + u^2 v, \\ \partial_t v(t, x) = D_v \Delta v(t, x) + bu - u^2 v, \end{cases}$$

avec $a = 3$, $b = 10.2$, $D_v = 10$ et D_u variable. Simulation sur le domaine $(x, y) \in [-55, 55]^2$ avec la donnée initiale

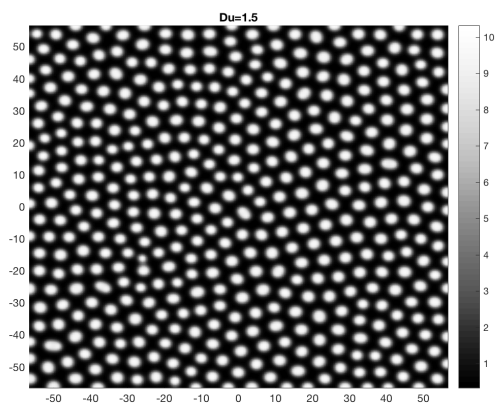
$$u(t = 0, x, y) = a + 0.3(2rand(x, y) - 1)$$

et

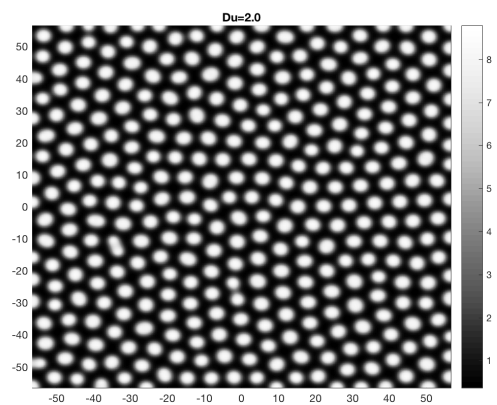
$$v(t = 0, x, y) = b/a + 0.3(2rand(x, y) - 1),$$

où $rand$ représente un aléa entre 0 et 1 pour chaque valeur de (x, y) .

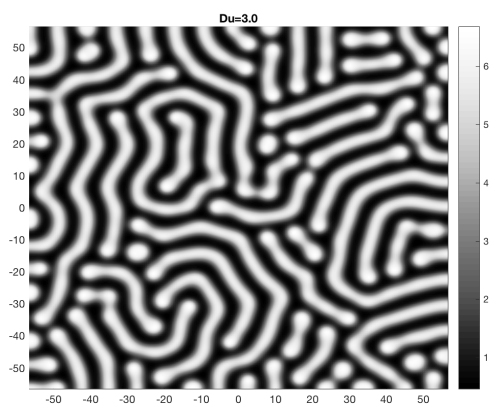
Pour différents D_u , les solutions $u(t, x, t)$ obtenues à $t = 200$ avec la méthode semi-implicite sont



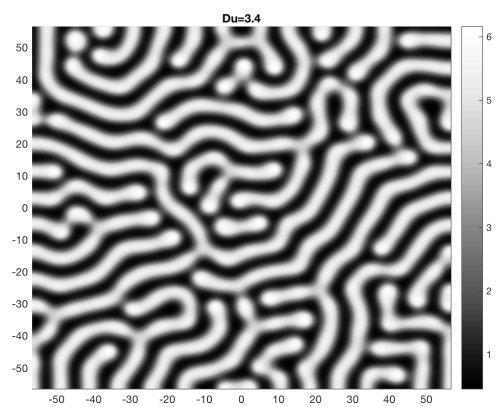
$$D_u = 1.5$$



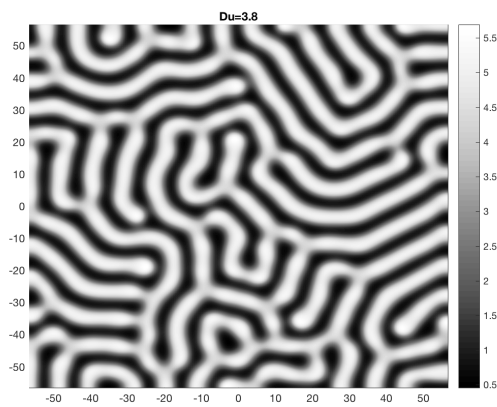
$$D_u = 2.0$$



$$D_u = 3.0$$



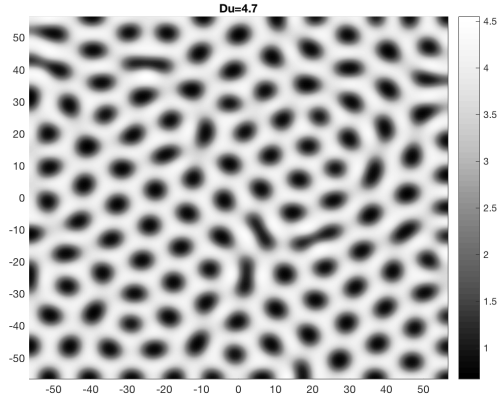
$$D_u = 3.4$$



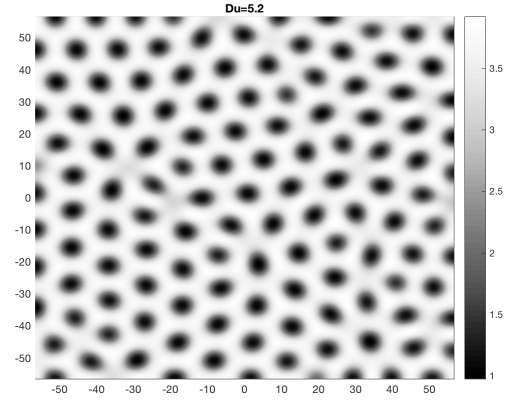
$$D_u = 3.8$$



$$D_u = 4.2$$



$D_u = 4.7$



$D_u = 5.2$

3 Équation de Gray-Scott

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = D_u \Delta u(t, x) - u^2 v + F(1 - u), \\ \partial_t v(t, x) = D_v \Delta v(t, x) + u^2 v - (F + k)v, \end{cases}$$

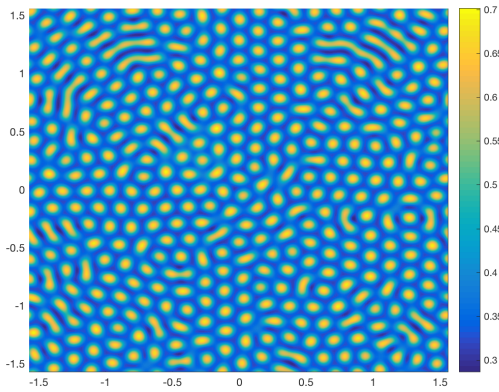
avec $D_u = 2 \cdot 10^{-5}$, $D_v = 10^{-5}$, F et k variable. Simulation sur le domaine $(x, y) \in [-\pi/2, \pi/2]^2$ avec la donnée initiale

$$u(t = 0, x, y) = 1$$

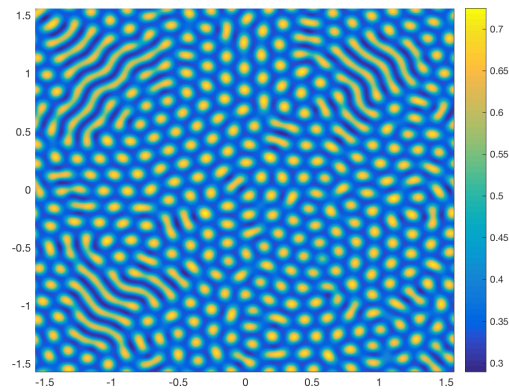
et

$$v(t = 0, x, y) = 1 - 0.2 \text{rand}(x, y), \text{ pour } (x, y) \in \Omega,$$

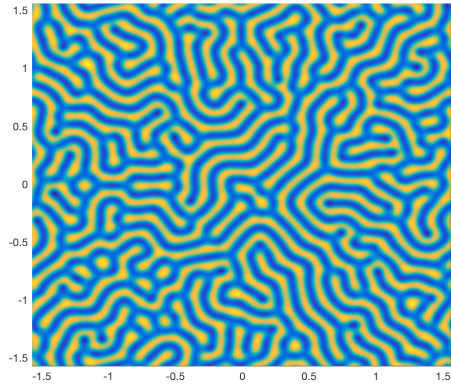
$\Omega = \{-0.2 \leq x \leq 0, -0.2 \leq y \leq 0.2\} \cup \{0 \leq x \leq 0.2, 0 \leq y \leq 0.2\}$. Pour différents F et k , les solutions $u(t, x, t)$ obtenues à $t = 7500$ avec la méthode de pas fractionnaires avec Fourier rapide sont



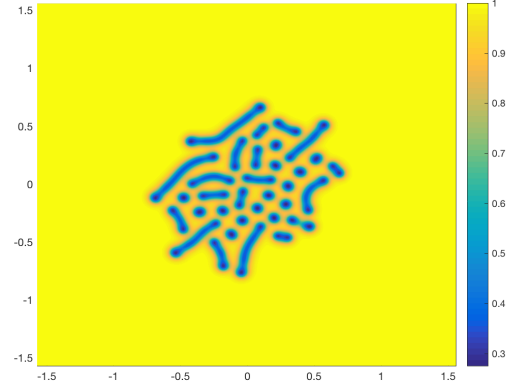
$F = 0.026, k = 0.053$



$F = 0.030, k = 0.055$



$$F = 0.030, k = 0.057$$



$$F = 0.046, k = 0.065$$

4 Équation de Fischer-KPP

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) + u(1 - u - v), \\ \partial_t v(t, x) = u, \end{cases}$$

Simulation sur le domaine $(x, y) \in [-64, 64] \times [-1, 1]$ avec la donnée initiale

$$u(t = 0, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 < x < 2, \forall y, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad v(t = 0, x, y) = 0.$$

Évolution de la solution pour $t \in [0, 15]$

