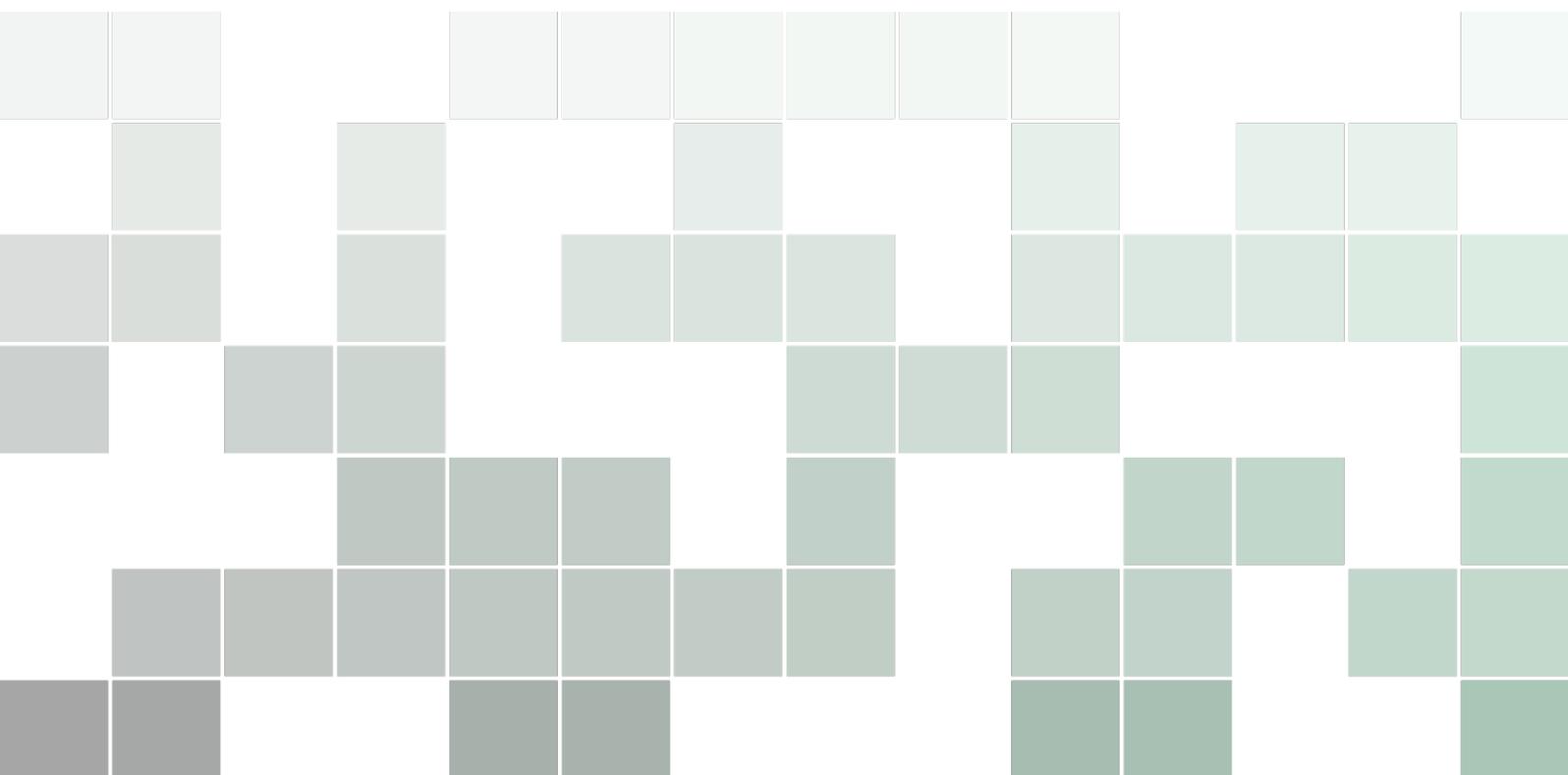


Méthodes Numériques

M1 Mécanique

Christophe Besse



Copyright © 2017 Christophe Besse

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, November 2017



Table des matières

1	Motivations	5
1.1	Problèmes typiques d'advection-diffusion	5
1.1.1	Dispersion d'un polluant dans un estuaire de rivière	5
1.1.2	Transport du tourbillon dans un écoulement incompressible	6
1.2	EDP limites typiques	7
1.3	Conditions aux limites et problèmes bien posés	7
1.3.1	Type de conditions aux limites	7
1.3.2	Problème hyperbolique	7
1.3.3	Problèmes elliptique et parabolique	8
2	Une première approche	9
2.1	Introduction aux éléments finis	9
2.2	Éléments finis \mathbb{P}_1 en dimension 1	10
3	Éléments finis bidimensionnels	15
3.1	Maillages bidimensionnels	15
3.2	Méthode des éléments finis	20
3.3	Application au problème modèle 2D	21
4	Approche variationnelle	23
4.1	Formules de Green	23
4.2	Formulations variationnelles des problèmes elliptiques d'ordre 2	24
4.2.1	Conditions aux limites de Dirichlet homogènes	24
4.2.2	Conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes	25
4.2.3	Conditions aux limites de Neumann	25

4.2.4	Conditions aux limites de Fourier-Robin	25
4.2.5	Conditions aux limites mixtes Dirichlet et Neumann	26
4.3	Traitement éléments finis de problème elliptique 1D avec conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes	26
5	Mise en œuvre de la M.E.F	29
5.1	Éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1	31
5.2	EF de Lagrange \mathbb{P}_2	39
5.2.1	Cas 1D	39
5.2.2	Cas 2D	41
5.3	Intégration numérique sur un triangle	42
	Bibliographie	47
	Livres	47
	Notes de cours	47
	Index	49

1. Motivations

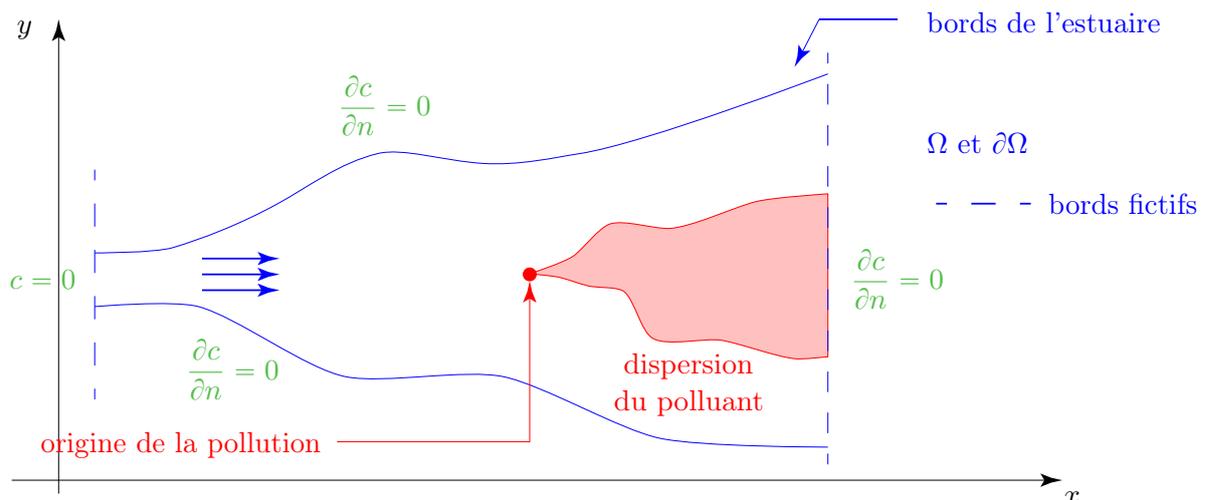
La plupart des modèles mathématiques issus de la mécanique des milieux continus génèrent des équations aux dérivées partielles (EDP) contenant une combinaison de :

- termes de transport (convection, advection)
- termes de diffusion

Il existe un nombre adimensionnel typique qui caractérise l'importance relative de chacun de ces effets suivant le modèle considéré.

1.1 Problèmes typiques d'advection-diffusion

1.1.1 Dispersion d'un polluant dans un estuaire de rivière



On considère un domaine bi-dimensionnel. Soit $c(x, y, t)$ la concentration d'un polluant. On souhaite modéliser l'évolution de ce polluant dans la rivière représentée ci-dessus.

L'équation typique est donnée par

$$\partial_t c + \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{\nabla} c}_{\text{terme de transport}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} c)}_{\text{terme de diffusion}} + s. \quad (1.1)$$

Les quantités en jeu sont

- c : moyenne de la concentration sur la profondeur
- s : source de la pollution, qui peut varier en espace et en temps
- \vec{V} : champs de vitesse horizontale (pas de composante verticale z , car on suppose être en 2D). C'est une donnée du problème qui peut varier avec le temps.
- D : coefficient de diffusion qui incorpore les effets de mélange dus aux mouvements verticaux gommés dans l'équation, ainsi que la diffusion turbulente et moléculaire. On suppose D indépendant de c .

Les dimensions typiques de ce type de problèmes peuvent être

- $V = \|\vec{V}\|$: 0.5 m/s à 3 m/s
- D : 0.05 m²/s à 5 m²/s
- L : longueur caractéristique : 100 m

On construit le nombre adimensionné dit nombre de Péclet défini par

$$Pe = \frac{VL}{D}.$$

Il mesure l'importance relative du terme de diffusion (d'ordre cD/L^2) par rapport au terme de transport (d'ordre Vc/L). Pour les valeurs indiquées, il varie comme

$$10 \leq Pe \leq 6000.$$

1.1.2 Transport du tourbillon dans un écoulement incompressible

Si on doit calculer \vec{V} , on suppose qu'elle n'est pas affectée par le taux de concentration du polluant. La vitesse \vec{V} obéit aux équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible d'un fluide Newtonien

$$\begin{cases} \rho \partial_t \vec{V} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où p désigne la pression et μ la viscosité dynamique.

Pour résoudre ce problème dans le cas particulier d'un écoulement incompressible 2D, on observe qu'il doit exister une fonction de courant scalaire $\psi(x, y)$ telle que

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on peut définir la fonction tourbillon $\omega(x, y)$ par la relation

$$\omega = \partial_x v - \partial_y u$$

et l'équation (1.2) devient

$$\begin{cases} \rho \partial_t \omega + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \omega = \mu \Delta \omega, \\ \omega = -\Delta \psi, \\ \vec{V} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi). \end{cases} \quad (1.3)$$

Ceci est un ensemble d'équation non-linéaires couplées entre elles. Souvent, on résout ces équations successivement :

- calcul du tourbillon pour un champs de vitesse donnée par la première équation,
- obtention de ψ par résolution d'un problème type Laplacien,
- calcul de \vec{V} par dérivation de ψ .

L'intérêt, c'est que la première équation est maintenant du même type que l'équation (1.1).

Pour cette équation, le nombre adimensionnel est le nombre de Reynolds $Re = \rho VL/\mu$. Pour la viscosité cinématique de l'eau $\nu = \mu/\rho = 10^{-6}$ m²/s, on a $Re \approx 10000$.

1.2 EDP limites typiques

On peut distinguer un certain nombre de cas limites :

- problème stationnaire ou non
- P_e petit ou grand
 - P_e petit : effets de transports négligeables
 - P_e grand : diffusion négligeable
 - P_e quelconque

Dans chacun de ces cas, le type d'EDP change. Identifier le type d'EDP est important car le mode adéquat de traitement numérique en dépend de manière cruciale.

On a donc six cas possibles

$P_e \rightarrow 0$	$0 = \vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla}c)$ EDP elliptique (ordre 2)	$\partial_t c = \vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla}c)$ EDP parabolique (ordre 2)
P_e inter- médiaire	$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}c = \vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla}c)$ EDP elliptique (ordre 2)	$\partial_t c + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}c = \vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla}c)$ EDP parabolique (ordre 2)
$P_e \rightarrow \infty$	$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}c = 0$ EDP hyperbolique (ordre 1)	$\partial_t c + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}c = 0$ EDP hyperbolique (ordre 1)

1.3 Conditions aux limites et problèmes bien posés

Trouver la solution qui satisfait un système d'EDP et les conditions aux limites (conditions initiales + conditions aux frontières) forme un problème bien posé si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- la solution existe,
- la solution est unique,
- la solution dépend continûment des données.

Noter que ce sont des questions difficiles de mathématiques.

Ces questions restent valables lorsque l'on a discrétisé le problème : même si le problème continu est bien posé (ce qui est un pré-requis pour faire du numérique), le problème discret peut être mal posé : il faut que la procédure de discrétisation soit stable et fournisse une solution proche de la solution exacte (ce qui est un problème d'analyse numérique).

1.3.1 Type de conditions aux limites

- conditions de Dirichlet : $u = f$ sur $\partial\Omega$,
- conditions de Neumann : $\partial_n u = f$ sur $\partial\Omega$, $\partial_n u = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}u$,
- conditions de Robin : $\partial_n u + ku = f$ sur $\partial\Omega$,
- conditions de Cauchy : $u(t=0) = g$ sur $\Omega \times \{t=0\}$ (voir $\partial_t u(t=0) = h$ si l'EDP est hyperbolique d'ordre 2).

1.3.2 Problème hyperbolique

Le problème typique (sans bord) est donné par

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, \\ u(t=0) = u_0(x). \end{cases}$$

Supposons qu'on connaisse $x = x(t)$ la position au cours du temps (on parle de courbe caractéristique), alors $u = u(x(t), t)$ et

$$\frac{du}{dt} = \partial_t u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \partial_t u + c \partial_x u$$

qui est donc nulle si $\dot{x} = c$: u est donc constante le long de $x(t)$.

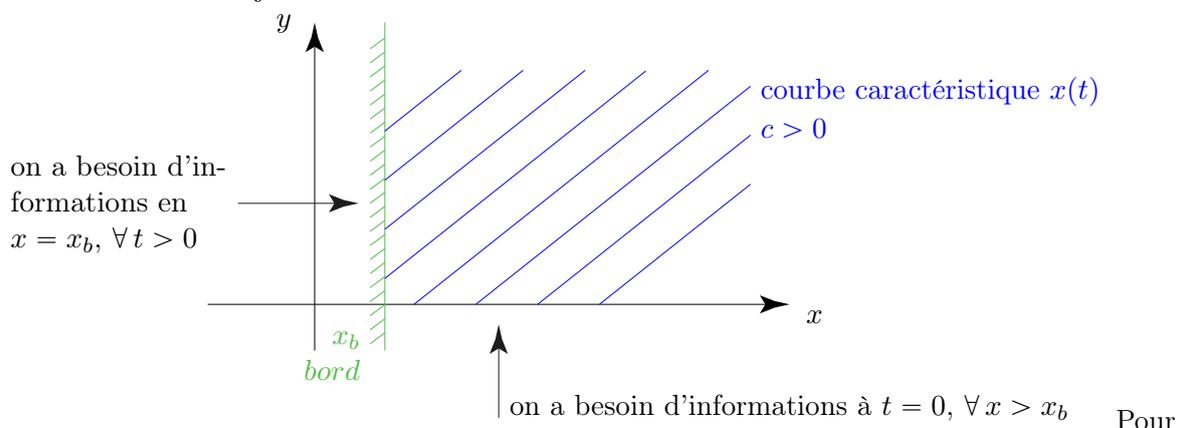
Comme $\dot{x} = c$, $x(t) = ct + x(0)$ et par la constance de u le long de $x(t)$, on a

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x_0)$$

et donc $u(ct + x_0, t) = u_0(x_0)$ soit encore

$$u(x, t) = u_0(x - ct).$$

Si maintenant on rajoute bord :



résoudre le problème, il faut donc imposer à la fois des conditions de Cauchy, mais aussi des conditions de Dirichlet en x_b (ce serait aussi le cas pour $c < 0$ si on considérait le domaine à gauche de $x = x_b$).

1.3.3 Problèmes elliptique et parabolique

- Pour les problèmes elliptiques, il faut imposer des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ tout entier (et pas simplement une partie de $\partial\Omega$ comme pour les problèmes hyperboliques).
- Pour les problèmes paraboliques, il faut imposer des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ comme pour les problèmes elliptiques, mais aussi en supplément une condition de Cauchy.

Les méthodes de types éléments finis se prêtent bien au traitement des EDP elliptiques et paraboliques (pour ce cas, il faut aussi appliquer un schéma pour la discrétisation en temps). Ce n'est pas le cas pour les problèmes hyperboliques qui nécessitent un traitement particulier (volumes finis, Galerkin discontinu, ...).

2. Une première approche

2.1 Introduction aux éléments finis

Nous considérons pour débuter le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Il s'agit en fait dans ce cas simple mono dimensionnel d'une équation différentielle ordinaire sans condition de Cauchy mais des conditions de Dirichlet homogènes.

Dans ce cas très simple, on peut résoudre l'équation par intégrations successives

$$u'(s) = -\int_0^s f(t) dt + c_1$$

où c_1 est une constante à déterminer. Puis,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x u'(s) ds \\ &= -\int_0^x \left(\int_0^s f(t) dt \right) ds + c_1 x + c_2, \end{aligned}$$

où c_2 est une constante à déterminer. Or, on a $u(0) = u(1) = 0$ et donc $c_2 = 0$ et

$$0 = u(1) = -\int_0^1 \left(\int_0^s f(t) dt \right) ds + c_1$$

d'où la valeur de c_1 et on a alors

$$u(x) = \int_0^x \left(\int_0^s f(t) dt \right) ds + x \int_0^1 \left(\int_0^s f(t) dt \right) ds. \quad (2.2)$$

R Il faut que $\int_0^s f(t) dt$ existe pour que u existe pour tout $0 \leq s \leq 1$. On écrit cette condition $f \in L^1(0, 1)$.

Le but de la méthode des éléments finis est de produire une méthode numérique qui permettra de calculer une approximation de la solution u sur un ordinateur. Dans le cas présent, il serait facile de déterminer une approximation de (2.2) mais la connaissance de solutions explicites de type (2.2) est extrêmement rare et il vaut mieux construire une approximation qui donne une solution approchée dans tous les cas.

Le principe de base est de construire un maillage du domaine $\Omega = [0, 1]$. En dimension 1, un maillage est simplement constitué d'une collection de points $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ c'est à dire une subdivision de $[0, 1]$

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$



Le maillage sera dit uniforme si les points x_j sont équidistants, c'est à dire $x_j = jh$ avec $h = 1/(n+1)$, $0 \leq j \leq n+1$.



Il n'est pas nécessaire d'avoir un maillage uniforme.

Les points x_j sont appelés les sommets du maillage. On produit des intervalles (mailles)

$$I_k =]x_{k-1}, x_k[, \quad k = 1, 2, \dots, n+1.$$

Si le maillage est uniforme, $h = x_k - x_{k-1}$ pour tout k . Sinon, on définit le pas du maillage par

$$h = \max_{1 \leq k \leq n+1} (x_k - x_{k-1}).$$

Le pas h est un indicateur de la finesse du maillage.

2.2 Éléments finis \mathbb{P}_1 en dimension 1

La méthode des éléments finis (MEF) \mathbb{P}_1 repose sur l'espace discret des fonctions globalement continues et affines par maille

$$V_h = \left\{ v \in C^0([0, 1]) \text{ tel que } v|_{I_k} \in \mathbb{P}_1, \quad k = 1, \dots, n+1, \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \right\},$$

où \mathbb{P}_1 désigne les polynômes de degré 1. Les fonctions $v \in V_h$ sont donc affines sur chaque maille I_k .

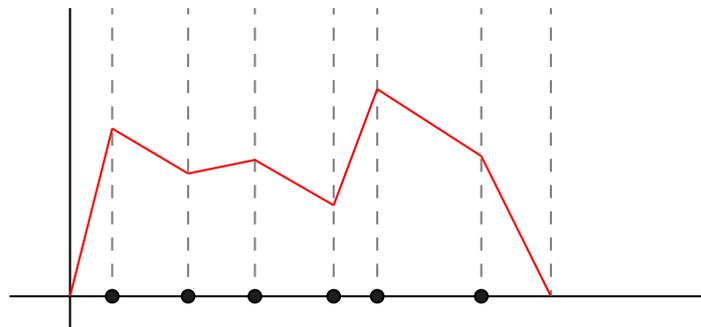
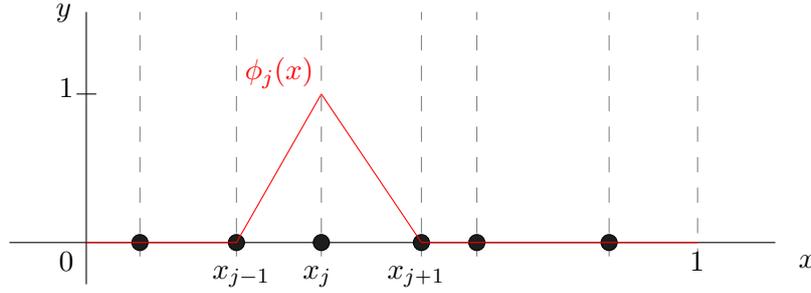


FIGURE 2.1 – Exemple de fonction $v \in V_h$

Il est clair que V_h est un espace vectoriel : si on prend v_1 et $v_2 \in V_h$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_h$: en effet, la fonction reste affine par morceaux et les conditions aux limites sont vérifiées. Il existe donc une base pour représenter toutes les fonctions de V_h . Les fonctions de base qu'on utilise pour V_h sont des fonctions chapeaux



La fonction chapeau ϕ_j associée au sommet x_j est définie pour $j = 1, \dots, n$ par

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] = I_j \cup I_{j+1}, \\ \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] = I_j, \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] = I_{j+1}. \end{cases}$$

On a donc

$$\phi_j(x_j) = 1 \quad \text{et} \quad \phi_j(x_k) = 0, \quad \forall k \neq j,$$

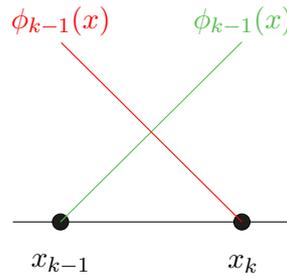
et $\phi_j \in V_h$. Lorsque le maillage est uniforme,

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin I_j \cup I_{j+1}, \\ \frac{x - x_{j-1}}{h}, & \text{si } x \in I_j, \\ \frac{x_{j+1} - x}{h}, & \text{si } x \in I_{j+1}, \end{cases}$$

et on remarque alors que les ϕ_j se définissent à partir d'une unique fonction ϕ par

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right), \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Dans le cas général, on a sur une maille I_k deux fonctions de base qui coexistent



et on peut faire correspondre $\phi_k(x)|_{I_k}$ à la fonction $\widehat{\phi}_1(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ et $\phi_{k-1}(x)|_{I_k}$ à la fonction $\widehat{\phi}_2(x) = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$. On a ainsi

$$\phi_{k-1}(x)|_{I_k} = \widehat{\phi}_2\left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right) \quad \text{et} \quad \phi_k(x)|_{I_k} = \widehat{\phi}_1\left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right).$$

L'espace V_h est un sous espace de $C^0([0, 1])$ de dimension finie n , et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^n v_h(x_j) \phi_j(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Cette base permet donc de caractériser une fonction de V_h par ses valeurs aux sommets du maillage : on parle dans ce cas d'éléments finis de Lagrange.

Décrivons maintenant la résolution pratique du problème de Dirichlet (2.1) par éléments finis \mathbb{P}_1 . On commence par écrire le problème à résoudre sous une forme dite faible ou variationnelle. On l'obtient en multipliant (2.1) par une fonction v qui s'annule aux bords du domaine, puis en intégrant sur tout le domaine

$$-\int_0^1 u''(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \underbrace{[u'v]_0^1}_{=0} = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

On arrive à

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx,$$

pour toute fonction v suffisamment régulière pour que tous ces calculs aient un sens.

R Afin que les intégrales ci-dessus aient un sens, si on remplace u par v dans la première intégrale, on a

$$\int_0^1 |v'(x)|^2 dx$$

qui se doit d'être fini afin que cette intégrale existe.

On sait en outre que

$$\left| \int_0^1 f(x)v(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx \int_0^1 |v(x)|^2 dx$$

et de même, il faut que ces deux intégrales ne soient pas infinies.

On sait de plus que $v(0) = v(1) = 0$.

On résume donc en disant que

$$v \in \left\{ g \in C^0([0, 1]) \mid \int_0^1 |g(x)|^2 dx < +\infty, \int_0^1 |g'(x)|^2 dx < +\infty, g(0) = g(1) = 0 \right\}.$$

Cet espace fonctionnel s'appelle l'espace de Sobolev $H_0^1(0, 1)$. Il faut aussi que u appartienne à cet espace. De plus, il faut que

$$f \in \left\{ g \in C^0([0, 1]) \mid \int_0^1 |g(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

On note cet espace fonctionnel $L^2([0, 1])$.

Si on définit

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx \quad \text{et} \quad l(v) = \int_0^1 fv dx,$$

le problème devient :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(0, 1) \text{ telle que } a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Cette formulation variationnelle peut s'appliquer dans le cas de l'espace de fonction $V_h \in H_0^1(0, 1)$, c'est à dire à résoudre le problème

Trouver $u_h \in V_h$ telle que $a(u_h, v_h) = l(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$.

On dit que ce problème est approché ou discrétisé.

On décompose alors u_h sur la base de $\{\phi_j\}_{1 \leq j \leq n}$ et on prend $v_h = \phi_i$, $1 \leq i \leq n$ ce qui donne

$$\sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) u_h(x_j) = l(\phi_i).$$

En notant $U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$, $b_h = (l(\phi_i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, et en introduisant la matrice

$$K_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

la formulation variationnelle revient à résoudre dans \mathbb{R}^n le système linéaire

$$K_h U_h = b_h.$$

En résolvant ce système linéaire, on obtient U_h dont les composantes sont les valeurs de u_h aux sommets $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ du maillage.

Ce qui rend intéressant les éléments finis, c'est le fait que les fonctions de base ϕ_j ont un "petit" support, l'intersection des supports de ϕ_j et de ϕ_i est souvent vide et la plupart des coefficients de K_h sont nuls. Un calcul simple montre que

$$a(\phi_j, \phi_i) = \begin{cases} -\frac{1}{x_{j+1} - x_j}, & \text{si } j = i - 1, \\ \frac{1}{x_j - x_{j-1}} + \frac{1}{x_{j+1} - x_j}, & \text{si } j = i, \\ -\frac{1}{x_j - x_{j-1}}, & \text{si } j = i + 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si le maillage est uniforme

$$a(\phi_j, \phi_i) = \begin{cases} -\frac{1}{h}, & \text{si } j = i - 1, \\ \frac{2}{h}, & \text{si } j = i, \\ -\frac{1}{h}, & \text{si } j = i + 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on a

$$K_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice tri-diagonale.

Pour obtenir le second membre, il faut calculer les intégrales

$$(b_h)_i = l(\phi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq n.$$

En pratique, on a recours à des formules de quadrature (intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales. Par exemple, on peut utiliser la formule du point milieu

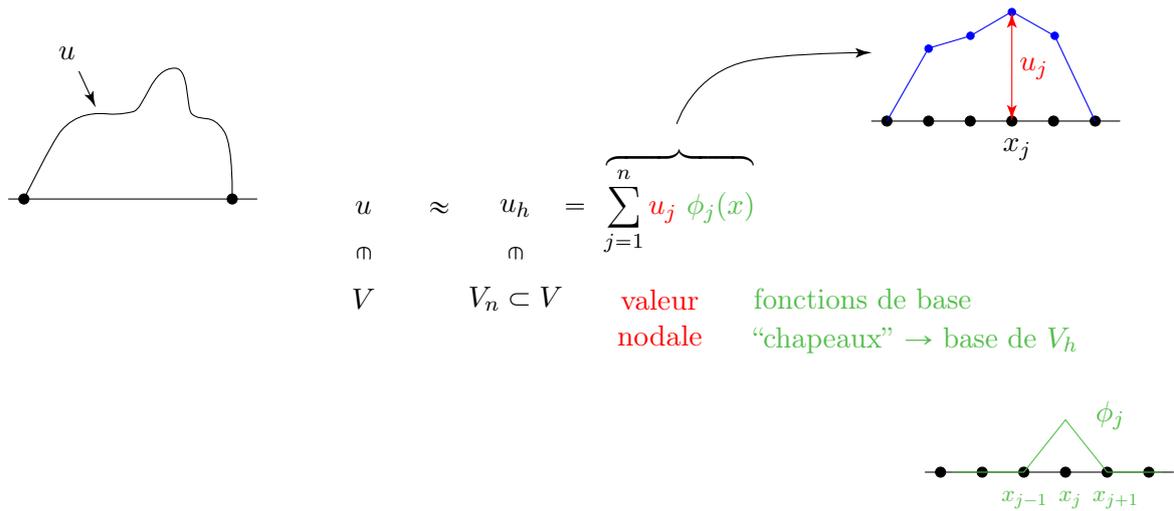
$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \psi\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)$$

ou celle des trapèzes

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \frac{1}{2} (\psi(x_{i+1}) + \psi(x_i)).$$

Ces deux formules sont exactes pour les fonctions affines, sinon, elles approchent les intégrales à un terme de reste $\mathcal{O}(h^2)$ près.

On peut résumer l'approximation par éléments finis par le schéma suivant



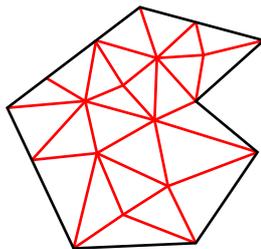
3. Éléments finis bidimensionnels

Les objectifs sont d'étendre en 2D la méthode d'approximation vue en 1D. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ et $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω .

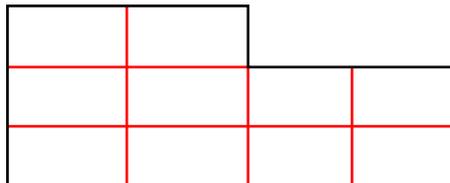
3.1 Maillages bidimensionnels

Le choix du maillage dépend de la géométrie du domaine et la taille des éléments de l'allure (régularité) de la fonction recherchée.

- Si le domaine est polygonal, on va triangulariser Ω , c'est à dire fabriquer une partition de Ω en domaine triangulaires



Si le domaine est polygonal à angles droits, on peut aussi envisager de faire une partition de Ω par des rectangles



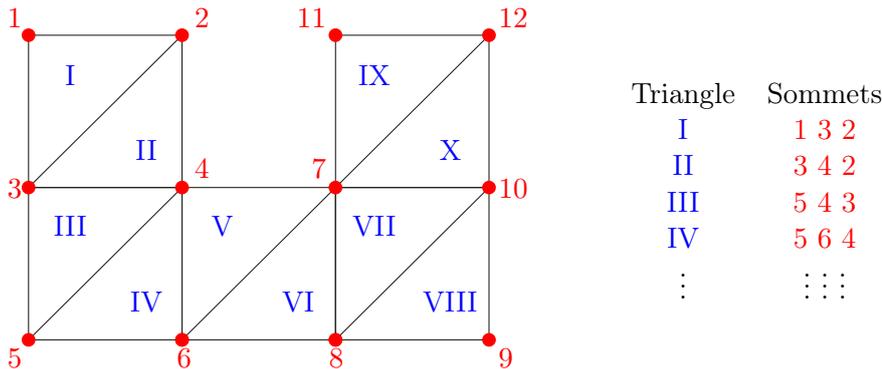
- Si le domaine est quelconque, on approche en première approximation la frontière Γ par une ligne polygonale. On note $\hat{\Omega}$ le domaine polygonal ainsi défini puis on triangularise $\hat{\Omega}$. Il existe aussi des techniques pour paramétrer localement la frontière (éléments finis isoparamétrique).

Un maillage est la donnée de trois nombres

- un nombre de sommets N_0
- un nombre de côtés N_1
- un nombre de d'éléments N_2

R On ne doit pas confondre les sommets et les nœuds. Un sommet est l'intersection de plusieurs arêtes communes d'éléments. Un nœud est un point où est défini une valeur discrète ou nodale de l'approximation (voir les treillis ultérieurement).

■ **Exemple 3.1** On considère le maillage suivant



Comme on le voit, chaque triangle est composé de trois sommets, dont les coordonnées géométriques sont données dans le tableau suivant

Sommets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
x_i	0	1	0	1	0	1	2	2	3	...
y_i	2	2	1	1	0	0	1	0	0	...

En dimension 3, les triangles deviennent des tétraèdres. On regroupe toutes ces formes géométriques sous le terme de N-simplexe.

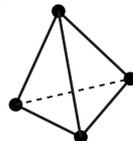
Définition 3.1.1 On appelle N-simplexe K de \mathbb{R}^N l'enveloppe convexe de $(N + 1)$ points $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1} \in \mathbb{R}^N$ appelé sommets de K

■ **Exemple 3.2**

- 2-simplexe \rightarrow triangle



- 3-simplexe \rightarrow tétraèdre



On dit qu'un N-simplexe K est non dégénéré si les points $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ n'appartiennent pas à un même hyperplan de \mathbb{R}^N . Pour savoir si un N-simplexe est dégénéré ou non, on construit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

constitué des coordonnées $(a_{i,j})_{1 \leq j \leq N+1}$ des sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$, et le N-simplexe est non dégénéré si

$$\det(A) \neq 0.$$

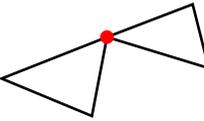
Un N-simplexe a autant de faces que de sommets, qui sont elles mêmes des (N-1)-simplexes.

Définition 3.1.2 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert polygonal connexe. Un maillage triangulaire ou une triangulation de $\bar{\Omega}$ est un ensemble τ_h de N-simplexes non dégénérés $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui vérifient

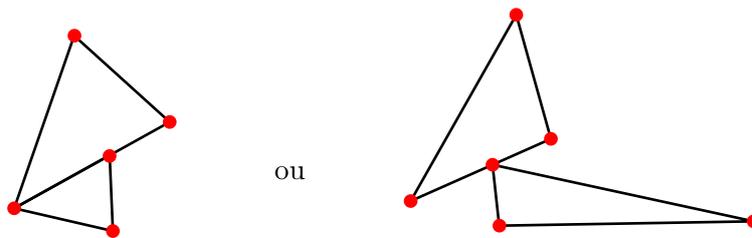
1. $K_i \subset \bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^n K_i$
2. $K_i \cap K_j$ est un m-simplexe ($i \neq j$), $0 \leq m \leq N - 1$ dont tous les sommets sont aussi des sommets de K_i et K_j .

Les sommets du maillage τ_h sont les sommets des N-simplexes K_i qui le composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des N-simplexes K_i .

Examinons quelques cas exclus par le point 2 de la définition. Si $N = 2$, l'intersection de deux triangles est

- vide 
- réduite à un point 
- un segment 

La définition contient un certain nombre de restrictions sur le maillage : on parle de maillage conforme. Voici quelques situations interdites par la définition



Aucun sommet n'est situé au milieu d'une arête.

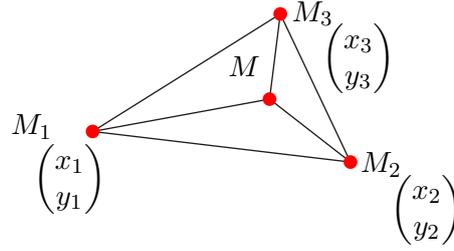
Dans un N-simplexe, il est commode d'utiliser des coordonnées barycentriques au lieu des coordonnées cartésiennes standards.

Définition 3.1.3 Si K est un N-simplexe non dégénéré de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$, les coordonnées barycentriques $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de $x \in \mathbb{R}^N$ sont définies par

$$\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Le système linéaire ci-dessus admet une unique solution car on demande que K soit non dégénéré et donc $\det(A) \neq 0$.

Ainsi, pour le 2-simplexe (triangle) $T = (M_1 M_2 M_3)$ suivant et le point $M(x, y)$



le système linéaire est

$$\begin{cases} x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 = x \\ y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3 = y \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

que l'on écrit $S\Lambda = X$ d'où la solution $\Lambda = S^{-1}X$.

Définissons M_4 le point du plan tel que $(M_1M_2M_4M_3)$ forme un parallélogramme. On sait que l'aire de ce parallélogramme est donnée par

$$\|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}\|$$

et donc

$$\text{Aire}(M_1M_2M_3) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}\|$$

d'où

$$\text{Aire}(M_1M_2M_3) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right|$$

ce qu'on écrit encore

$$|T| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |\det(S)|.$$

On montre que

$$S^{-1} = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & x_2y_3 - x_3y_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 & x_3y_1 - x_1y_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

et donc

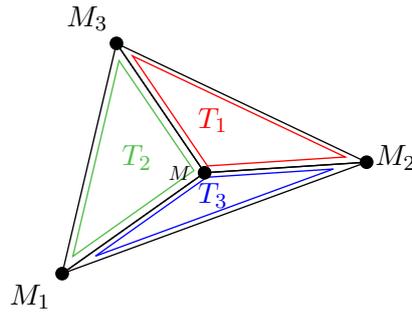
$$\lambda_1 = \frac{\|\overrightarrow{MM_2} \wedge \overrightarrow{MM_3}\|}{2|T|} = \frac{2\text{Aire}(MM_2M_3)}{2|T|},$$

$$\lambda_2 = \frac{2\text{Aire}(MM_3M_1)}{2|T|},$$

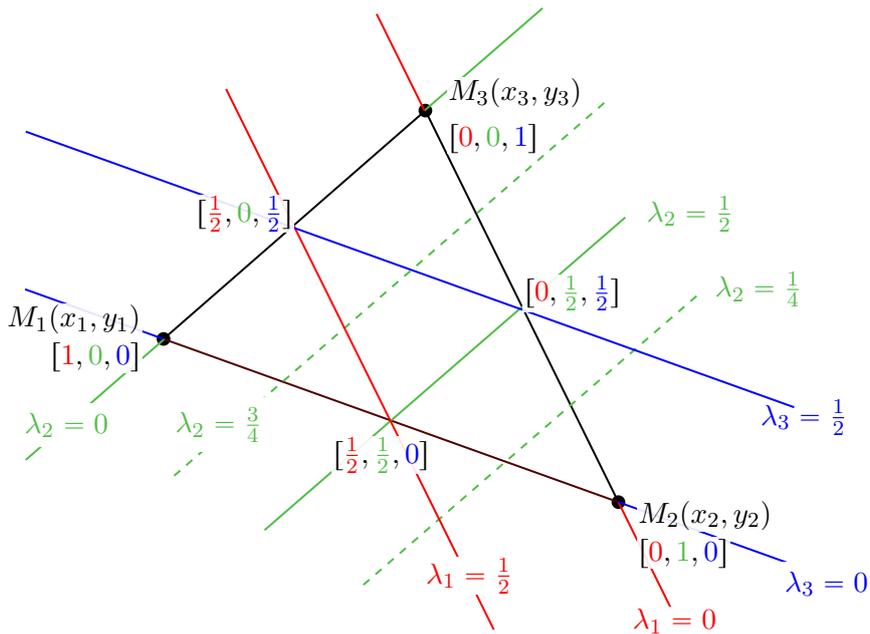
et

$$\lambda_3 = \frac{2\text{Aire}(MM_1M_2)}{2|T|}.$$

On a ainsi $\lambda_i = |T_i|/|T|$, $i = 1, 2, 3$ où les triangles T_i sont donnés par



On dispose donc d'une double représentation des points dans le plan. Un point M a donc pour coordonnées cartésiennes $M = (x, y)$ et pour coordonnées barycentriques $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$.



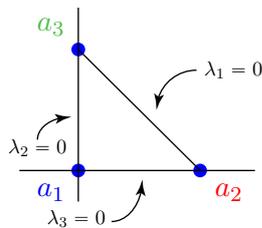
L'avantage des coordonnées barycentriques est qu'elles sont indépendants du systèmes de coordonnées cartésiennes.

On peut facilement voir que si on considère un N -simplexe K associé à $N + 1$ points, alors

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \lambda_j(x) \geq 0, 1 \leq j \leq N + 1\}.$$

Les $(N + 1)$ faces de K sont les intersections de K et des hyperplans $\lambda_j(x) = 0, 1 \leq k \leq N + 1$.

■ **Exemple 3.3** On considère le 2-simplexe



$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, la matrice du système linéaire est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'on l'inverse est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient $\Lambda = A^{-1}X$, avec $X = {}^t(x_1, x_2, 1)$, soit

$$\lambda_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2, \quad \lambda_2(x_1, x_2) = x_1, \quad \lambda_3(x_1, x_2) = x_2.$$

Les équations des faces sont donc données par

- $\lambda_1(x_1, x_2) = 0 = 1 - x_1 - x_2$
- $\lambda_2(x_1, x_2) = 0 = x_1$
- $\lambda_3(x_1, x_2) = 0 = x_2$

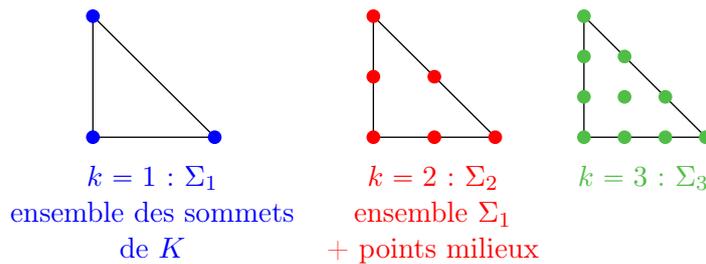
■

On peut alors définir l'ensemble des points de K qui vont jouer un rôle particulier pour la suite.

Définition 3.1.4 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle treillis d'ordre k l'ensemble

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \mid \lambda_j(x) \in \left\{ 0; \frac{1}{k}; \dots; \frac{k-1}{k}; 1 \right\}, 1 \leq j \leq N+1 \right\}.$$

■ **Exemple 3.4**



■

Dans le cas général, Σ_k est un ensemble finis de points $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$.

3.2 Méthode des éléments finis

Nous définissons maintenant l'ensemble \mathbb{P}_k des polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k , c'est à dire $p \in \mathbb{P}_k$ s'écrit

$$p(x) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_N \geq 0 \\ i_1 + i_2 + \dots + i_N \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N}, \quad x = (x_1, \dots, x_N).$$

L'intérêt d'un treillis Σ_k d'un N -simplexe K est qu'il permet de caractériser tous les polynômes de \mathbb{P}_k : on dit que Σ_k est unisolvant pour \mathbb{P}_k .

On peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors tous les polynômes de \mathbb{P}_k est déterminé de manière unique par ses valeurs aux points $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ du treillis Σ_k . Donc, il existe une base de \mathbb{P}_k notée $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ telle que

$$\psi_j(\sigma_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n_k.$$

On peut maintenant définir la méthode d'éléments finis \mathbb{P}_k

Définition 3.2.1 Étant donné un maillage τ_h d'un ouvert connexe polygonal Ω , la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k , ou éléments finis triangulaires de Lagrange d'ordre k , associée à ce maillage, est définie par l'espace discret

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v|_{K_i} \in \mathbb{P}_k, \forall K_i \in \tau_h \right\}.$$

On appelle nœuds des degrés de liberté l'ensemble des points $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ des treillis d'ordre k de chacun des N-simplexes $K_i \in \tau_h$. On ne compte qu'une seule fois les points qui coïncident et n_{dl} est le nombre de degré de liberté de la méthode d'éléments finis \mathbb{P}_k . On appelle degré de liberté d'une fonction $v \in V_h$ l'ensemble des valeurs de v aux nœuds.

Lorsque l'on considère des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur $\partial\Omega$, on construit l'espace

$$V_{0h} = \{v \in V_h \mid v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

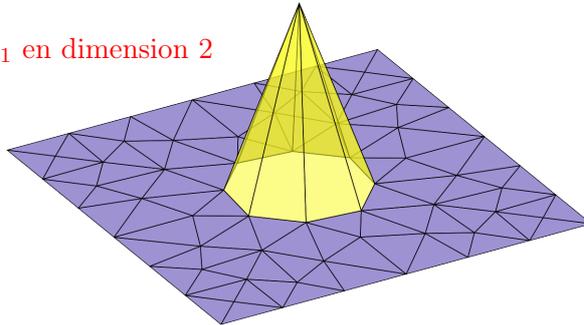
La dimension de V_h est n_{dl} et on a une base de V_h donnée par la famille $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ définie par

$$\phi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl}$$

et on a

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\hat{a}_i) \phi_i(x).$$

Exemple de $\phi_i \in \mathbb{P}_1$ en dimension 2



3.3 Application au problème modèle 2D

On considère le problème classique

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

La solution explicite d'un tel problème n'existe pas en général, il est donc intéressant de réaliser un calcul approché par la méthode des éléments finis. L'existence et l'unicité de solutions de ce problème a été vu en cours de mathématiques. On peut donc chercher une solution approchée.

On commence, comme pour le cas 1D, à écrire la formulation variationnelle du problème. En 1D, on a pris une fonction v nulle au bord et on a utilisé une intégration par parties. On doit dorénavant utiliser une formule similaire étendu aux problèmes multidimensionnels : il s'agit de la formule de Green. Pour une fonction v suffisamment régulière, on a

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n u(s) v(s) ds.$$

La solution u vérifie alors pour toute fonction v suffisamment régulière et nulle au bord

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \, dx$$

ce que l'on note à nouveau $a(u, v) = l(v)$.

On transforme maintenant ce problème en une version approchée : trouver $u_h \in V_{0h}$ telle que

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_{0h}.$$

On décompose u_h sur la base des $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ et on prend $v_h = \phi_i$, ce qui conduit à

$$\sum_{j=1}^{n_{dl}} u_h(\hat{\alpha}_j) a(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_i).$$

En notant $U_h = (u_h(\hat{\alpha}_j))_{1 \leq j \leq n_{dl}}$, $b_h = (l(\phi_i))_{1 \leq i \leq n_{dl}}$, et en introduisant la matrice de rigidité

$$K_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \leq i, j \leq n_{dl}},$$

la formulation variationnelle dans V_{0h} revient à résoudre dans \mathbb{R}^N le système linéaire

$$K_h U_h = b_h.$$

Comme en 1D, l'intersection des supports des ϕ_i et ϕ_j est souvent nulle et donc K_h est creuse (la plupart de ses coefficients sont nuls).

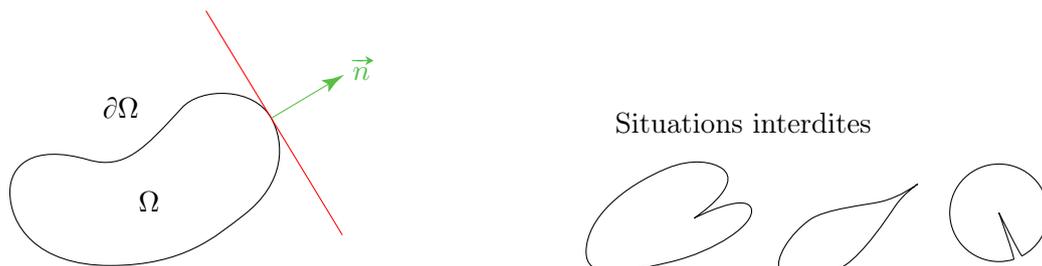
4. Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution d'EDP est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation préalablement multipliée par une fonction quelconque dite teste. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties, nous commençons par donner quelques résultats applicables en toute dimension.

4.1 Formules de Green

On considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, borné ou non, dont le bord est noté $\partial\Omega$. Cet ouvert est localement situé d'un seul côté de $\partial\Omega$ et supposé régulier de classe C^1 . On définit la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ comme étant le vecteur unité $\vec{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$ normal en tout point au plan tangent de $\partial\Omega$ et pointant vers l'extérieur de $\partial\Omega$.

■ Exemple 4.1



On note dx la mesure volumique (dite de Lebesgue) dans Ω et ds la mesure surfacique sur $\partial\Omega$.

Théorème 4.1.1 — Formule de Green. Soit Ω un ouvert de classe C^1 . Soit $w \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ à

support borné dans $\bar{\Omega}$. Alors, w vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(s)n_i(s) ds,$$

où n_i est la i ème composante de \vec{n} .

R w à support borné dans $\bar{\Omega}$ veut dire qu'elle s'annule à l'infini si le domaine Ω n'est pas borné de telle sorte que les intégrales sur Ω soient assurées de converger.

Corollaire 4.1.2 — Formule d'intégration par parties. Soit Ω un ouvert de classe C^1 . Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans $\bar{\Omega}$. Alors, elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(s)v(s)n_i(s) ds.$$

Corollaire 4.1.3 Sous les mêmes hypothèses mais avec $u \in \mathbb{C}^2(\bar{\Omega})$, on a

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(s)v(s) ds.$$

4.2 Formulations variationnelles des problèmes elliptiques d'ordre 2

On considère l'équation modèle

$$-\nabla \cdot (a_1(x)\nabla u) + a_0(x)u = f(x), \quad x \in \Omega,$$

avec $a_1(x) \geq c_{\min} > 0$ et $a_0(x) \geq 0$, pour tout $x \in \Omega$.

4.2.1 Conditions aux limites de Dirichlet homogènes

On impose $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors, si on multiplie l'équation par une fonction régulière v , et en intégrant, on a

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (a_1\nabla u)v + a_0uv dx = \int_{\Omega} fv dx.$$

Par intégration par partie, cela conduit à

$$\int_{\Omega} a_1(x)\nabla u \cdot \nabla v + a_0uv dx - \int_{\partial\Omega} a_1\partial_n u(s)v(s) ds = \int_{\Omega} fv dx. \quad (4.1)$$

On n'a aucune connaissance de $\partial_n u$ sur $\partial\Omega$, on impose donc $v = 0$ sur $\partial\Omega$ (de sorte que v vérifie la même conditions aux limites que u) et la formulation variationnelle devient :

Trouver $u \in V_0 = \{f \in V | u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, où V est un espace de fonctions suffisamment régulières, telle que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_1(x)\nabla u \cdot \nabla v + a_0uv dx = \int_{\Omega} fv dx = l(v), \quad \forall v \in V_0.$$

L'étude des formes bilinéaire continue $a(\cdot, \cdot)$ et linéaire continue $l(\cdot)$ permet de conclure à l'existence de solution par le théorème de Lax Milgram.

4.2.2 Conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes

On demande $u(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$. On considère une fonction $G \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $G = g$ sur $\partial\Omega$. La fonction G s'appelle un relèvement de g et n'est pas unique. C'est une souplesse qui est d'une grande aide.

On écrit $u = G + \phi$ de sorte que la recherche de la solution u du système

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_1 \nabla u) + a_0 u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

revient à trouver ϕ telle que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_1 \nabla (G + \phi)) + a_0 (G + \phi) = f, & x \in \Omega, \\ G + \phi = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_1 \nabla \phi) + a_0 \phi = f + \nabla \cdot (a_1 \nabla G) - a_0 G, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On est donc ramené au cas des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, mais où la fonction f est remplacée par $f + \nabla \cdot (a_1 \nabla G) - a_0 G$.

4.2.3 Conditions aux limites de Neumann

On demande maintenant $\partial_N u = g$ sur $\partial\Omega$. Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution, on doit ajouter $a_0(x) \geq a_{\min} > 0$ dans Ω .

On repart de l'équation (4.1)

$$\int_{\Omega} a_1(x) \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v \, dx - \int_{\partial\Omega} a_1 \partial_n u(s) v(s) \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Cette fois, $\partial_n u$ est connue, et il n'est donc pas nécessaire d'imposer une condition aux limites à v . La formulation variationnelle devient :

Trouver $u \in V$ telle que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_1(x) \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} a_1 g v \, ds = l(v), \quad \forall v \in V.$$

Il faut remarquer cependant par rapport au cas des conditions aux limites de Dirichlet homogènes que l'espace fonctionnel pour u et v a changé.

4.2.4 Conditions aux limites de Fourier-Robin

On demande $c_1 u + c_2 \partial_n u = g$ sur $\partial\Omega$. On impose

- $c_1, c_2 \in C^0(\partial\Omega)$, $c_1, c_2 > 0$
- $|c_2| \geq \varepsilon > 0$ sur $\partial\Omega$
- $g \in C^0(\partial\Omega)$

On repart de (4.1)

$$\int_{\Omega} a_1(x) \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v \, dx - \int_{\partial\Omega} a_1 \partial_n u(s) v(s) \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

La condition aux limites est $\partial_n u = (g - c_1 u)/c_2$ d'où le problème est : trouver $u \in V$ telle que

$$\underbrace{\int_{\Omega} a_1(x) \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{a_1 c_1}{c_2} u(s) v(s) \, ds}_{a(u, v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{a_1}{c_2} g(s) v(s) \, ds}_{l(v)}$$

pour tout $v \in V$.

- R** Cette formulation donne une technique simple pour imposer numériquement des conditions de Dirichlet inhomogènes. En effet, supposons que $c_1 = 1$ et c_2 se voit affectée d'une très grande valeur, disons 10^{30} pour fixer les idées. Alors, la relation $\partial_n u = (g - c_1 u)/c_2$ devient

$$\partial_n u = 10^{-30}(g - u)$$

alors, $\partial_n u \approx 0$ et donc $u \approx g$, ce qui permet d'imposer quasiment $u = g$.

4.2.5 Conditions aux limites mixtes Dirichlet et Neumann

On découpe $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ et on demande $u = g_D$ sur Γ_D et $\partial_n u = g_N$ sur Γ_N .

- (a) g_D est définie sur Γ_D : on étend g_D à tout $\partial\Omega$ en prenant une fonction (non unique) $\overline{g_D} \in C^0(\partial\Omega)$ telle que

$$\overline{g_D}(s) = g_D(s) \quad \text{si } s \in \Gamma_D.$$

- (b) Relèvement (non unique) $G \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ de $\overline{g_D}$

$$G(s) = \overline{g_D}(s), \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

- (c) On cherche u sous la forme $u = \phi + G$, d'où

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_1 \nabla (\phi + G)) + a_0 (\phi + G) = f, & \Omega, \\ \phi + G = g_D, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial}{\partial n} (\phi + G) = g_N, & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_1 \nabla \phi) + a_0 \phi = f + \nabla \cdot (a_1 \nabla G) - a_0 G, & \Omega, \\ \phi = 0, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial}{\partial n} (\phi + G) = g_N, & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

La formulation variationnelle devient : trouver $\phi \in \tilde{V}_0$ telle que

$$\int_{\Omega} a_1 \nabla \phi \cdot \nabla v + a_0 \phi v \, dx = \int_{\Omega} f v - a_1 \nabla G \cdot \nabla v - a_0 G v \, dx + \int_{\Gamma_N} a_1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial n} (\phi + G)}_{g_N} v \, ds$$

pour tout $v \in \tilde{V}_0$ où

$$\tilde{V}_0 = \{f \in V \mid f = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

4.3 Traitement éléments finis de problème elliptique 1D avec conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes

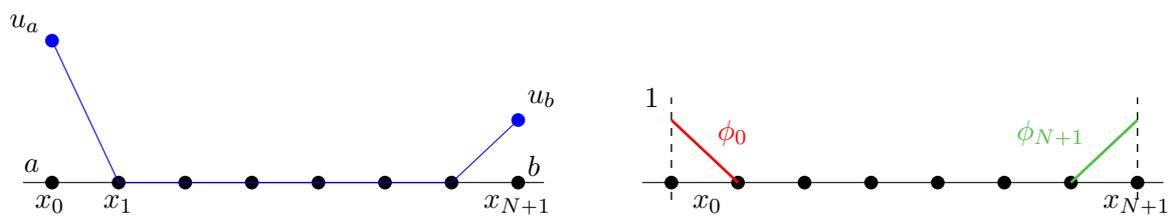
$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = f, & x \in]a, b[, \\ u(a) = u_a, u(b) = u_b. \end{cases}$$

On doit faire un relèvement $u = \phi + G$ où G telle que $G(a) = u_a$ et $G(b) = u_b$. La formulation variationnelle est : trouver $\phi \in V_0$ telle que

$$a(\phi, v) = \int_a^b \phi' v' + \alpha \phi v \, dx = \int_a^b f v - G' v' - \alpha G v \, dx = l(v)$$

pour tout $v \in V_0$.

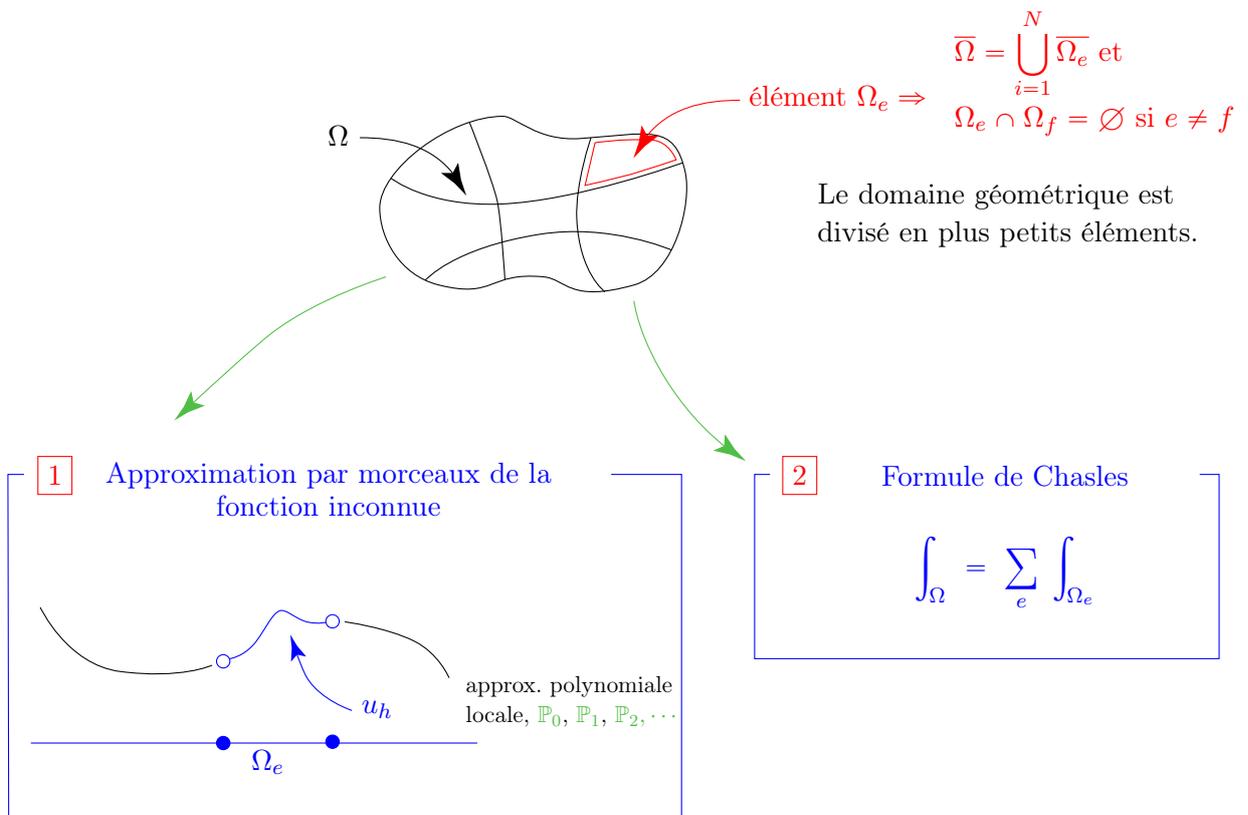
Le problème approché est : trouver $\phi_h \in V_{0h}$ telle que $a(\phi_h, v_h) = l(v_h)$ pour tout $v_h \in v_{0h}$. Il reste à trouver G . Le choix pratique dépend du type d'éléments finis choisis. Si on considère des éléments finis \mathbb{P}_1 , un choix simple est $G = u_a \phi_0 + u_b \phi_{N+1}$



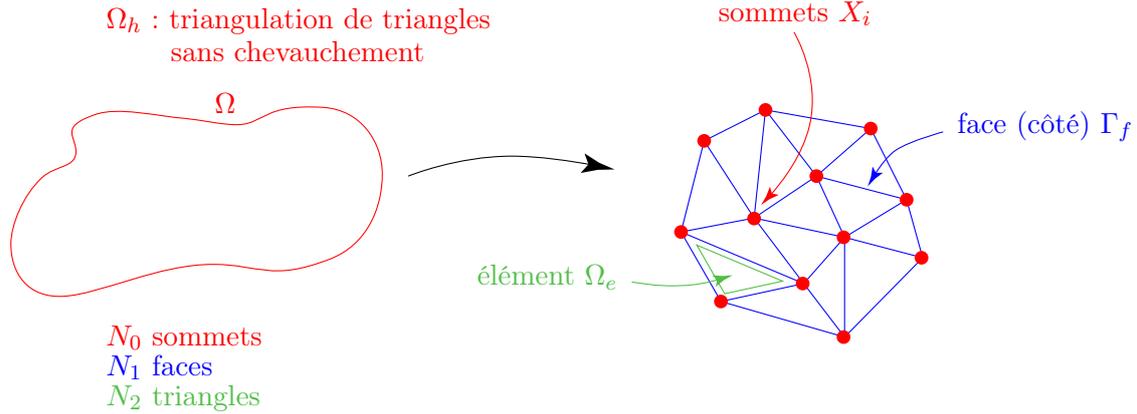


5. Mise en œuvre de la M.E.F

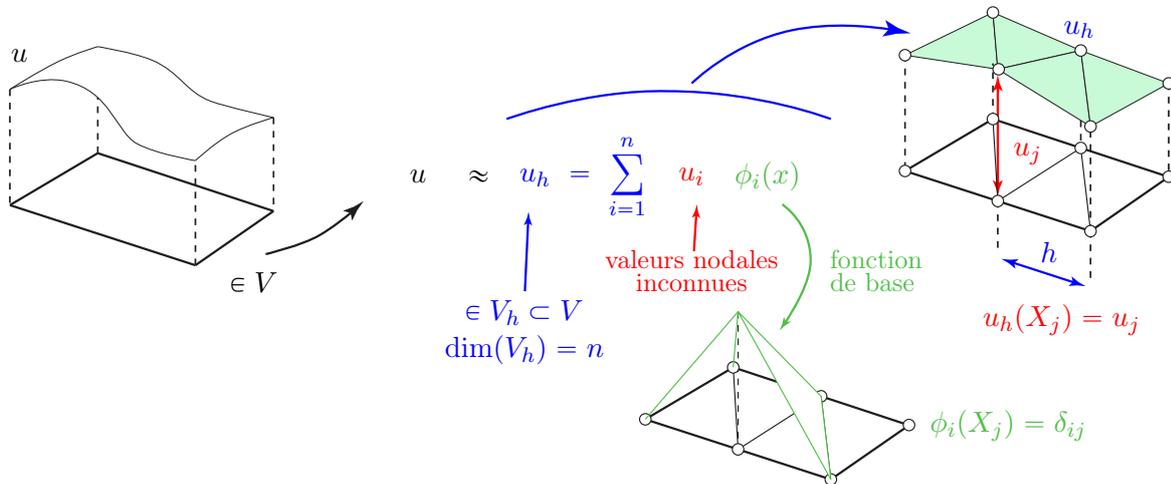
On présente la mise en œuvre en 2D, mais elle s'étend au 3D. Les deux idées basiques sont présentées sur la figure ci-dessous.



Rappelons ce qu'on entend par triangulation.



Une approximation éléments finis consiste en la décomposition suivante sur une base.



Une fois construit le maillage et les fonctions de base, il faut écrire $u_h = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j(x)$ et insérer dans la formulation variationnelle $a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i)$, $1 \leq i \leq n$ ce qui donne

$$\sum_{j=1}^n u_j a(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_i)$$

ce qui constitue un système linéaire.

Il faut donc être capable de calculer les termes $a(\phi_j, \phi_i)$ qui met en jeu des intégrales du type

$$\text{Masse} \quad \int_{\Omega} \phi_j(x) \phi_i(x) dx ; \quad \text{Rigidité} \quad \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx$$

ou encore

$$\int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx.$$

On décompose ensuite $\Omega = \cup \Omega_e$ et on a une somme d'intégrale sur les éléments Ω_e .

La construction de tous les éléments des matrices et second membre s'appelle la procédure d'assemblage. C'est une procédure qui peut être très coûteuse et on cherche donc à réduire son coût.

5.1 Éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1

On considère l'espace d'approximation $V_h = \{f \in C^0(\Omega) | f|_{\Omega_e} \text{ affine}\}$. Soit un nœud $X_i = (x_i, y_i)$. On dit que $\{\phi_k\}_k$ est une famille de fonctions de base si chaque membre de la famille vérifie

$$\phi_i(X_j) = \phi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}.$$

Le support des ϕ_k est réduit à l'union des triangles dont le point X_i est un sommet. On appelle fonction de forme les restrictions des ϕ_k à un seul élément Ω_e . Si Ω_e est un 2-simplexe (triangle), il a trois sommets. Sur ce 2-simplexe, trois fonctions de base cohabitent donc. Désignons par A_1, A_2 et A_3 ces trois sommets. Les restrictions à Ω_e des $\phi_{I_1}, \phi_{I_2}, \phi_{I_3}$ sont trois fonctions polynomiales de degré 1 telles que

$$\phi_{I_j}(A_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Notons ces restrictions λ_1 pour ϕ_{I_1} , λ_2 pour ϕ_{I_2} et λ_3 pour ϕ_{I_3} . On veut donc

$$\lambda_i(A_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

On a déjà rencontré ces fonctions : ce sont les coordonnées barycentriques.

Pour $X = (x_1, x_2)$, on rappelle qu'elles sont définies par les relations

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^3 A_{ij} \lambda_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq 2$$

où on a posé $A_j = (A_{1j}, A_{2j})$. Ce système linéaire prend la forme

$$\begin{cases} A_{11} \lambda_1 + A_{12} \lambda_2 + A_{13} \lambda_3 = x_1 \\ A_{21} \lambda_1 + A_{22} \lambda_2 + A_{23} \lambda_3 = x_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

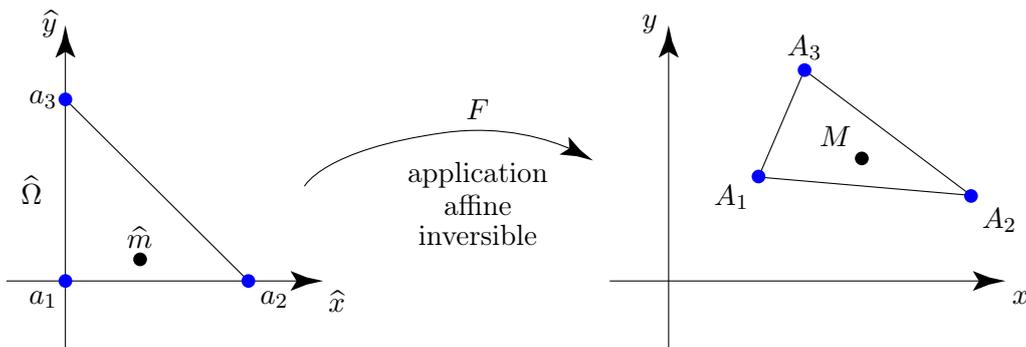
On rappelle que le déterminant du système vaut $2\text{Aire}(\Omega_e)$ et que par exemple, on a

$$\lambda_1(x_1, x_2) = \frac{A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} + x_1(A_{22} - A_{23}) + x_2(A_{13} - A_{12})}{2\text{Aire}(\Omega_e)}$$

et

$$\nabla \lambda_1 = \frac{1}{2\text{Aire}(\Omega_e)} \begin{pmatrix} A_{22} - A_{23} \\ A_{13} - A_{12} \end{pmatrix}.$$

On n'a pas très envie de manipuler de telles expressions. On préfère plutôt se ramener à un élément de référence puis utiliser les calculs sur l'élément Ω_e .



L'application F est définie par

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \widehat{X} &\longmapsto X = \alpha \widehat{X} + \beta \end{aligned}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^2$, telle que

$$F(a_i) = A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

On a alors

$$F(\widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y})) = M(x, y).$$

Or, les coordonnées barycentriques sur l'élément de référence $\widehat{\Omega}$ sont

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= 1 - \widehat{x} - \widehat{y}, \\ \widehat{\lambda}_2 &= \widehat{x}, \\ \widehat{\lambda}_3 &= \widehat{y}. \end{aligned}$$

et on peut donc exprimer un point \widehat{m} de $\widehat{\Omega}$ en terme de coordonnées barycentriques : $\widehat{m}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{m}(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_3)$, soit par définition des coordonnées barycentriques

$$\widehat{m} = \widehat{x}\widehat{e}_{\widehat{x}} + \widehat{y}\widehat{e}_{\widehat{y}} = \widehat{\lambda}_1\widehat{a}_1 + \widehat{\lambda}_2\widehat{a}_2 + \widehat{\lambda}_3\widehat{a}_3.$$

Comme l'application F est affine et encore une fois par définition des coordonnées barycentriques, on a

$$\begin{aligned} \vec{M} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \\ &= \widehat{\lambda}_1 F(\vec{a}_1) + \widehat{\lambda}_2 F(\vec{a}_2) + \widehat{\lambda}_3 F(\vec{a}_3) \\ &= \widehat{\lambda}_1 \vec{A}_1 + \widehat{\lambda}_2 \vec{A}_2 + \widehat{\lambda}_3 \vec{A}_3 \\ &= \lambda_1 \vec{A}_1 + \lambda_2 \vec{A}_2 + \lambda_3 \vec{A}_3 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\widehat{\lambda}_i = \lambda_i$$

et donc les coordonnées barycentriques sont conservées par la transformation affine F .

Si on note $A_i = {}^t(x_i, y_i)$, $\vec{M} = \sum_i \lambda_i \vec{A}_i$ et donc

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = f_1(\widehat{m}), \\ y &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = f_2(\widehat{m}), \end{aligned}$$

soit

$$M = F(\widehat{m}) = \begin{pmatrix} f_1(\widehat{m}) \\ f_2(\widehat{m}) \end{pmatrix}.$$

Définissons la jacobienne de l'application F

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial \widehat{y}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial \widehat{y}} \end{pmatrix}.$$

La première composante est donnée par

$$\frac{\partial f_1}{\partial \widehat{x}} = \frac{\partial}{\partial \widehat{y}} (\widehat{\lambda}_1 x_1 + \widehat{\lambda}_2 x_2 + \widehat{\lambda}_3 x_3) = \frac{\partial}{\partial \widehat{y}} (x_1(1 - \widehat{x} - \widehat{y}) + x_2 \widehat{x} + x_3 \widehat{y}) = x_2 - x_1.$$

de sorte que

$$J_F = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

et

$$|\det(J_F)| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 2\text{Aire}(\Omega_e) = \frac{\text{Aire}(\Omega_e)}{\text{Aire}(\widehat{\Omega})}.$$

Décrivons l'intérêt de ces manipulations.

1. Rappelons tout d'abord le théorème de changement de variables. Soit U et V deux ouverts bornés de \mathbb{R}^N et $f : U \rightarrow V$ une fonction C^1 inversible. Alors, pour toute fonction $g : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue et intégrable, on a

$$\int_{f(U)} g(y) dy = \int_U g(f(x)) |\det J_{f(x)}| dx, \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Grâce à ce résultat, on a

$$\int_{\Omega_e} g(x, y) dx dy = \int_{\widehat{\Omega}} g(x(\widehat{x}, \widehat{y}), y(\widehat{x}, \widehat{y})) 2\text{Aire}(\Omega_e) d\widehat{x} d\widehat{y}.$$

2. On peut exprimer les fonctions de forme grâce aux coordonnées barycentriques λ_i . Par exemple pour les éléments finis \mathbb{P}_1 , on a sur $\widehat{\Omega}$

$$\widehat{\phi}_i = \lambda_i.$$

3. On a la formule suivante

$$\int_{\Omega_e} \lambda_1^n \lambda_2^p \lambda_3^q dx dy = 2\text{Aire}(\Omega_e) \frac{n!p!q!}{(n+p+q+2)!}.$$

Plus généralement, sur \mathbb{R}^N , on a

Proposition 5.1.1 Pour tout N -simplexe K de \mathbb{R}^N et ses coordonnées barycentriques associées on a

$$\int_K \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_{N+1}^{\alpha_{N+1}} dx = N! \text{Volume}(K) \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_{N+1}!}{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{N+1} + N)!}.$$

- **Exemple 5.1** Calcul d'un élément de la matrice de masse sur $\widehat{\Omega}$

$$\int_{\widehat{\Omega}} \widehat{\phi}_1 \widehat{\phi}_2 d\widehat{x} d\widehat{y} = \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 d\widehat{x} d\widehat{y} = \frac{1!1!}{(1+1+2)!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Nous verrons que le changement de variables appliqué au calcul des éléments de la matrice de rigidité est légèrement plus compliqué. Avant cela, il faut voir comment utiliser les résultats précédents pour le calcul effectif de la matrice de masse globale et donc comment faire l'assemblage. Cela revient à comprendre le lien entre

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fonctions} & & \text{Fonctions} & & \text{Fonctions} \\ \text{de base} & \longrightarrow & \text{de forme} & \longrightarrow & \text{de forme} \\ \text{globale} & & \text{locale à } \Omega_e & & \text{locale à } \widehat{\Omega} \end{array}$$

- **Exemple 5.2** On considère une fonction de base associé à une fonction de forme décrite ci-dessous

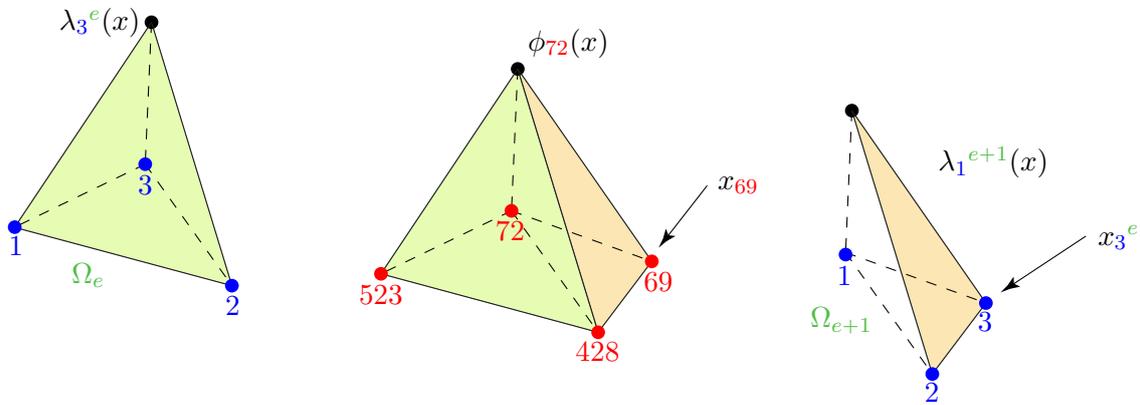
$$\phi_{72}(x) = \lambda_3^e(x) \rightsquigarrow \widehat{\lambda}_3(\widehat{x})$$

↑ label global ↑ label local
 seulement sur Ω_e indice d'élément

auxquelles est associé la table de connectivité

	1	2	3
⋮	⋮	⋮	⋮
e	523	428	72
$e + 1$	72	428	69
⋮	⋮	⋮	⋮

Alors, la représentation de la fonction de base et des deux fonctions de forme associées prend la forme



puis on fait correspondre $\lambda_3^e(X)$ à $\widehat{\lambda}_3$ et $\lambda_1^{e+1}(X)$ à $\widehat{\lambda}_1$. ■

Maintenant que l'on a compris comment passer de Ω_e à $\widehat{\Omega}$, et comment faire le lien entre fonctions de base et fonctions de formes locales à Ω_e et $\widehat{\Omega}$, on peut voir comment calculer les éléments de la matrice de rigidité.

En dimension 1 : le changement de variable pour passer de $\widehat{x} \in [0, 1]$ à $x \in [a, b]$ est donné par $x = f(\widehat{x})$. Cela conduit donc à

$$g(x) = g(f(\widehat{x})) = (g \circ f)(\widehat{x}) = \widehat{g}(\widehat{x}),$$

ce qui conduit donc à

$$g'(x) = \frac{(\widehat{g}')(\widehat{x})}{f'(\widehat{x})} = [f'(\widehat{x})]^{-1} (\widehat{g}')(\widehat{x}).$$

En dimension 2 : on reproduit les calculs ci-dessus. On a

$$\begin{aligned}
 F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 \widehat{X} &\longmapsto X = F(\widehat{X}) \\
 \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\widehat{x}, \widehat{y}) \\ f_2(\widehat{x}, \widehat{y}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On considère une fonction

$$\begin{aligned}
 G : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 X &\longmapsto G(X) \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto G(X)
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \widehat{G} = G \circ F & : \quad \widehat{X} & \longmapsto & G \circ F(\widehat{X}) = \widehat{G}(\widehat{X}) \\ & \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} & \longmapsto & G(f_1(\widehat{x}, \widehat{y}), f_2(\widehat{x}, \widehat{y})) = \widehat{G}(\widehat{x}, \widehat{y}). \end{aligned}$$

Calculons le gradient de \widehat{G} . On a

$$\begin{aligned} \partial_{\widehat{x}} \widehat{G}(\widehat{x}, \widehat{y}) &= \partial_1 G \cdot \partial_{\widehat{x}} f_1 + \partial_2 G \cdot \partial_{\widehat{x}} f_2 = \begin{pmatrix} \partial_{\widehat{x}} f_1 & \partial_{\widehat{x}} f_2 \\ \partial_{\widehat{y}} f_1 & \partial_{\widehat{y}} f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 G \\ \partial_2 G \end{pmatrix}, \\ \partial_{\widehat{y}} \widehat{G}(\widehat{x}, \widehat{y}) &= \partial_1 G \cdot \partial_{\widehat{y}} f_1 + \partial_2 G \cdot \partial_{\widehat{y}} f_2 \end{aligned}$$

et donc

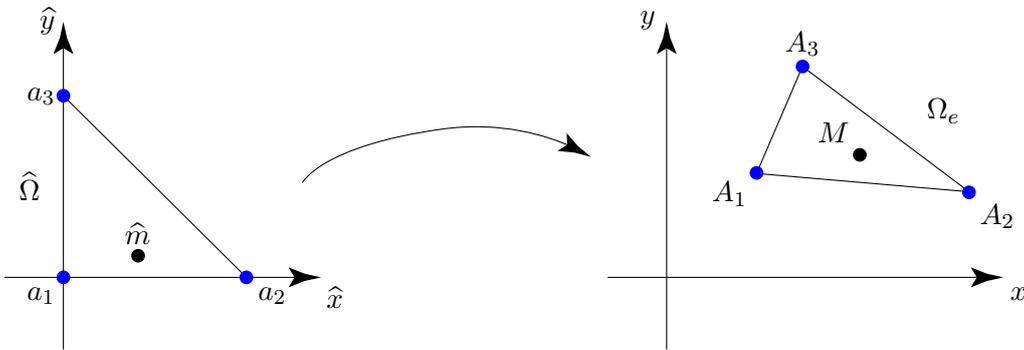
$$(\nabla_{\widehat{X}} \widehat{G})(\widehat{X}) = \begin{pmatrix} \partial_{\widehat{x}} f_1 & \partial_{\widehat{x}} f_2 \\ \partial_{\widehat{y}} f_1 & \partial_{\widehat{y}} f_2 \end{pmatrix} (\nabla_X G)(X) = {}^t(J_F)(\nabla_X G)(X)$$

et donc

$$(\nabla_X G)(X) = -{}^t(J_F)(\nabla_{\widehat{X}} \widehat{G})(X).$$

La notation $-{}^t(J_F)$ signifie $({}^t(J_F))^{-1}$.

On rappelle que la fonction F a pour effet



Ainsi, le calcul d'un élément de la matrice de rigidité devient

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{\Omega_e} \nabla_X \psi_j(X) \cdot \nabla_X \psi_i(X) dX = \int_{\widehat{\Omega}} \nabla_X \psi_j(F(\widehat{X})) \cdot \nabla_X \psi_i(F(\widehat{X})) 2\text{Aire}(\Omega_e) d\widehat{X} \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} \left[-{}^t(J_F)(\nabla_{\widehat{X}} (\psi_j(F(\widehat{X}))) \right] \cdot \left[-{}^t(J_F)(\nabla_{\widehat{X}} (\psi_i(F(\widehat{X}))) \right] 2\text{Aire}(\Omega_e) d\widehat{X} \\ &= 2\text{Aire}(\Omega_e) \int_{\widehat{\Omega}} \left[-{}^t(J_F)(\nabla_{\widehat{X}} \widehat{\phi}_j(\widehat{X})) \right] \cdot \left[-{}^t(J_F)(\nabla_{\widehat{X}} \widehat{\phi}_i(\widehat{X})) \right] d\widehat{X} \end{aligned}$$

On peut interpréter l'intégrale précédente comme un produit scalaire sur $L^2(\widehat{\Omega})$. Or, on sait

$$\begin{aligned} \langle Af, Bg \rangle &= {}^t(Bg)(Af) \\ &= {}^t_g {}^t B A f \\ &= \langle {}^t B A f, g \rangle, \end{aligned}$$

d'où

$$K_{ij} = 2\text{Aire}(\Omega_e) \int_{\widehat{\Omega}} {}^t(-{}^t J_F) (-{}^t J_F) \nabla_{\widehat{X}} \widehat{\phi}_j \cdot \nabla_{\widehat{X}} \widehat{\phi}_i d\widehat{X}$$

soit encore

$$K_{ij} = 2\text{Aire}(\Omega_e) \int_{\widehat{\Omega}} \widetilde{C} \nabla_{\widehat{X}} \widehat{\phi}_j \cdot \nabla_{\widehat{X}} \widehat{\phi}_i d\widehat{X}$$

où

$$\widetilde{C} = J_F^{-1} -{}^t J_F = ({}^t J_F J_F)^{-1}.$$

On a vu que

$$J_F = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A_1A_2} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A_1A_3}$$

de sorte que

$$J_F = \left(\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_1A_3} \right).$$

Après calcul, on montre

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \frac{1}{|\det(J_F)|^2} \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} & -\overrightarrow{A_1A_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \\ -\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} & \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} \end{pmatrix} \\ &:= \frac{1}{(2\text{Aire}(\Omega_e))^2} C \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{1}{2\text{Aire}(\Omega_e)} \int_{\hat{\Omega}} \left(C_{11} \partial_{\hat{x}} \hat{\phi}_j + C_{12} \partial_{\hat{y}} \hat{\phi}_j \right) \partial_{\hat{x}} \hat{\phi}_i + \\ &\quad \left(C_{21} \partial_{\hat{x}} \hat{\phi}_j + C_{22} \partial_{\hat{y}} \hat{\phi}_j \right) \partial_{\hat{y}} \hat{\phi}_i d\hat{X} \\ &= \frac{1}{2\text{Aire}(\Omega_e)} \int_{\hat{\Omega}} C_{11} \partial_{\hat{x}} \hat{\phi}_j \partial_{\hat{x}} \hat{\phi}_i + C_{12} \left(\partial_{\hat{y}} \hat{\phi}_j \partial_{\hat{x}} \hat{\phi}_i + \partial_{\hat{x}} \hat{\phi}_j \partial_{\hat{y}} \hat{\phi}_i \right) \\ &\quad C_{22} \partial_{\hat{y}} \hat{\phi}_j \partial_{\hat{y}} \hat{\phi}_i d\hat{X}. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\hat{\phi}_1 = \hat{\lambda}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \quad \hat{\phi}_2 = \hat{\lambda}_2 = \hat{x}, \quad \hat{\phi}_3 = \hat{\lambda}_3 = \hat{y}.$$

Les gradients des coordonnées barycentriques sont donc

$$\nabla_{\hat{X}} \hat{\phi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\hat{X}} \hat{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\hat{X}} \hat{\phi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant ces résultats, on voit facilement que

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{2\text{Aire}(\Omega_e)} \left[C_{11} \int_{\hat{\Omega}} 1 d\hat{X} + C_{12} \int_{\hat{\Omega}} 2 d\hat{X} + C_{22} \int_{\hat{\Omega}} 1 d\hat{X} \right] \\ &= \frac{1}{2\text{Aire}(\Omega_e)} \left(\frac{C_{11}}{2} + C_{12} + \frac{C_{22}}{2} \right). \end{aligned}$$

On montre en fait que

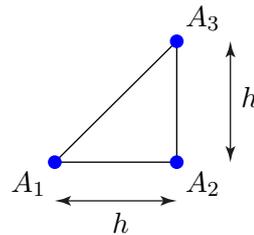
$$K_{ij} = \frac{1}{2\text{Aire}(\Omega_e)} (C_{11}S_1 + C_{12}S_2 + C_{22}S_3)_{ij}$$

où

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■ **Exemple 5.3** Donnons quelques exemples de matrice C pour deux éléments réguliers.

1. On considère Ω_e donné par le 2-simplexe



Alors,

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix},$$

de sorte que

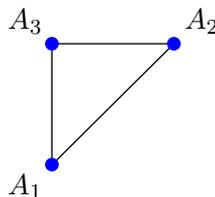
$$C = h^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a en outre $\text{Aire}(\Omega_e) = h^2/2$.

La matrice de rigidité est donc donnée par

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On considère Ω_e donné par le 2-simplexe



Alors,

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

de sorte que

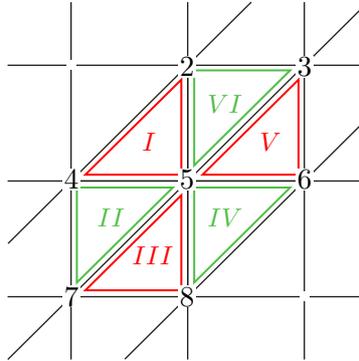
$$C = h^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

. La matrice de rigidité est donc donnée par

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Nous pouvons maintenant voir comment faire le calcul complet de la contribution d'une fonction de base à la matrice globale de rigidité.



On a vu que les matrices élémentaires associées sont données par

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Alors,

$$K_{ij} = K_{ij} + K_{ij}^e, \quad K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \partial_x \phi_i^e \partial_x \phi_j^e + \partial_y \phi_i^e \partial_y \phi_j^e \, dx dy.$$

La table de connectivité est

<i>I</i>	4	5	2
<i>II</i>	7	5	4
<i>III</i>	7	8	5
<i>IV</i>	8	6	5
<i>V</i>	5	6	3
<i>VI</i>	5	3	2

Par exemple, sur le 2-simplexe *I*, la matrice K_{ij}^I est

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_4 & \phi_5 & \phi_2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_2 \end{array}$$

Voici ci-dessous les contributions des différents éléments associés à la fonction de base attachée au nœud 5

	2	3	4	5	6	7	8
2	1 2	-1		-1-1			
3	-1	1 1			-1		
4			1 2	-1-1		-1	
5	-1-1		-1-1	2 1 1 2 1 1	-1-1		-1-1
6		-1		-1-1	1 2		
7			-1			1 1	-1
8				-1-1		-1 1	1

En isolant la ligne 5 et en sommant les composantes de ses cellules, on trouve

$$\frac{1}{2}(-2U_2 - 2U_4 + 8U_5 - 2U_6 - 2U_8)$$

ce qui correspond à l'approximation par différences finies centrées.

5.2 EF de Lagrange \mathbb{P}_2

Tout le travail fait jusqu'à présent peut s'étendre sans difficulté aux éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k . On fait ici le cas de \mathbb{P}_2 pour montrer le principe.

5.2.1 Cas 1D

On repart d'une subdivision de $[0, 1]$ en $n + 1$ intervalles, le maillage étant donc composé de $n + 2$ sommets.



On demande cette fois que

$$u \in V_h = \{v \in C^0([0, 1]) | v|_{I_k} \in \mathbb{P}_2, k = 1, \dots, n + 1\}.$$

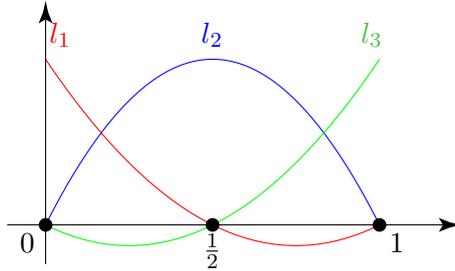
Comme on l'a vu, on ramène un élément I_k à un élément de référence $\hat{\Omega} = [0, 1]$. Étudions donc le cas de $\hat{\Omega}$. Sur $\hat{\Omega}$, les coordonnées barycentriques sont $\hat{\lambda}_1 = 1 - \hat{x}$ et $\hat{\lambda}_2 = \hat{x}$, ce qui assure que $\hat{\lambda}_1(0) = 1, \hat{\lambda}_1(1) = 0, \hat{\lambda}_2(0) = 0$ et $\hat{\lambda}_2(1) = 1$. On cherche à construire un polynôme de degré 2 sur $[0, 1]$. On ne peut pas construire un unique polynôme de degré 2 à partir de seulement deux points (ici 0 et 1). Il faut donc ajouter un nœud. On choisit par convention de rajouter le milieu de l'intervalle $[0, 1]$. Il faut maintenant construire une base de \mathbb{P}_2 sur $[0, 1]$. Comme pour le cas de \mathbb{P}_1 , on utilise les polynômes de Lagrange

$$l_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad 1 \leq j \leq n$$

où x_k sont les nœuds d'interpolation. Ici, on a $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$ et $x_3 = 1$. Ainsi,

$$l_1(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x - 1), \quad l_2 = -4(x - 1)x, \quad l_3 = 2x(x - \frac{1}{2}),$$

représentés ci-dessous.



Ainsi, $\forall p \in \mathbb{P}_2[\hat{x}]$, $p(\hat{x}) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j l_j(\hat{x})$. On a donc que les fonctions de base ψ_k sur $\hat{\Omega}$ sont les l_k , $k = 1, 2, 3$.

On a un autre moyen d'obtenir les ψ_k . Pour cela, on les exprime en terme de coordonnées barycentriques. Comme elles sont invariantes par application d'une transformation affine, leur connaissance sur $\hat{\Omega}$ entraîne leur connaissance sur I_k , $k = 1, \dots, n + 1$. On sait que $\hat{\lambda}_1(1/2) = 1/2$ et $\hat{\lambda}_2(1/2) = 1/2$. On en déduit donc

$$\psi_1(\hat{x}) = \hat{\lambda}_1(2\hat{\lambda}_1 - 1), \quad \psi_2(\hat{x}) = 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2, \quad \psi_3(\hat{x}) = \hat{\lambda}_2(2\hat{\lambda}_2 - 1).$$

On connaît donc directement les fonctions de formes sur n'importe quel élément I_k .

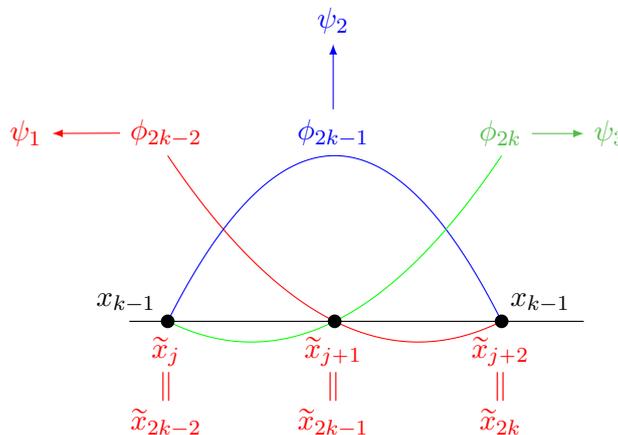
Utilisons ce résultat pour construire la matrice de masse élémentaire. Un élément $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ contient 2 sommets et 3 nœuds.



L'élément I_k est donc représenté par les sommets physiques $[x_{k-1}, x_k]$ mais aussi par ses nœuds $[\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+2}]$ où $j = 2k - 2$, soit encore $k = \lfloor \frac{j+2}{2} \rfloor$, et les fonctions de base vérifient $\phi_i(\tilde{x}_j) = \delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq 2n + 2$. Un élément non nulle de la matrice de masse est donc

$$M_{m,n} = \int_{I_k} \phi_m(x)\phi_n(x) dx,$$

avec $m \in \{2(k - 1), 2k - 1, 2k\}$ et $n \in \{2(k - 1), 2k - 1, 2k\}$.



Par exemple,

$$\begin{aligned} M_{2k-2,2k-2} &= \int_{I_k} \phi_{2k-2}(x) \phi_{2k-2}(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \lambda_1^2 (2\lambda_1 - 1)^2 dx \\ &= 4 \int_{I_k} \lambda_1^4 dx - 4 \int_{I_k} \lambda_1^3 dx + \int_{I_k} \lambda_1^2 dx. \end{aligned}$$

D'après le résultat de la proposition 5.1.1, pour tout N -simplexe K de \mathbb{R}^N et ses coordonnées barycentriques associées on a

$$\int_K \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_{N+1}^{\alpha_{N+1}} dx = \text{Volume}(K) \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_{N+1}! N!}{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{N+1} + N)!}.$$

Ici, $N = 1$ et on a

$$\int_K \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} dx = \text{mes}(K) \frac{\alpha_1! \alpha_2!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)!},$$

d'où

$$\begin{aligned} M_{2k-2,2k-2} &= (x_k - x_{k-1}) \left[4 \cdot \frac{4!}{5!} - 4 \cdot \frac{3!}{4!} + \frac{2!}{3!} \right] \\ &= (x_k - x_{k-1}) \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

On peut faire les mêmes calculs pour les autres fonctions de forme sur un élément I_k et on trouve la matrice de masse élémentaire

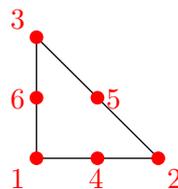
$$\frac{x_k - x_{k-1}}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice de rigidité élémentaire est elle donnée par

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

5.2.2 Cas 2D

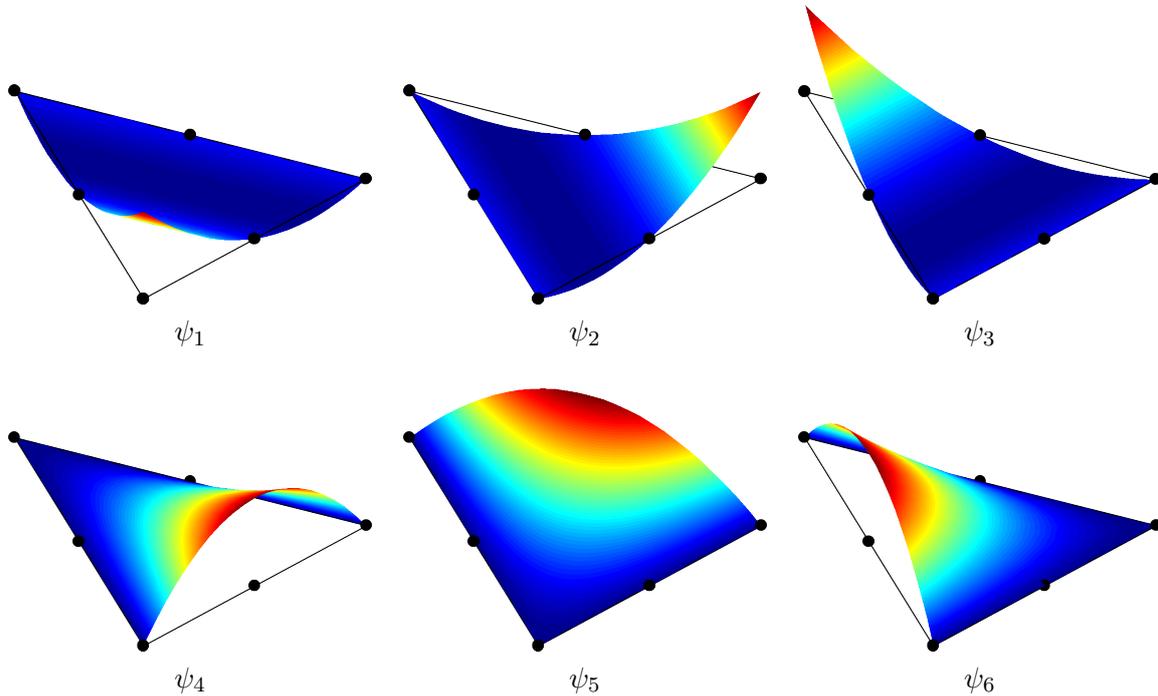
Le principe est le même : on exprime les fonctions de forme en terme de coordonnées barycentriques. On considère un 2-treillis



Six fonctions de forme sont associées, données par

$$\psi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad i = 1, 2, 3, \quad \psi_4 = 4\lambda_1\lambda_2, \quad \psi_5 = 4\lambda_2\lambda_3, \quad \psi_6 = 4\lambda_3\lambda_1.$$

On représente ces fonctions de forme ci-dessous.



5.3 Intégration numérique sur un triangle

Nous venons de voir comment assembler les matrices de masse et de rigidité. Concernant le second membre, deux possibilités se présentent :

1. Calcul de $\int_{\Omega} f(x)\phi_i(x) dx$ où on connaît la décomposition de $f(x)$ sur la base des ϕ_k

$$f(X) = \sum_{i=1}^N f(X_i)\phi_i(X),$$

et on est ramené au calcul de $\int_{\Omega} \phi_k\phi_i dx$ et donc à l'assemblage de la matrice de masse.

2. Si $f \notin V_h$, alors la décomposition ci-dessus n'est pas valide et il faut donc calculer $\int_{\Omega} f(x)\phi_i(x) dx$. On fait alors appel aux quadratures numériques.

On connaît bien ces procédures en 1D :

- point milieu
- rectangle
- trapèze
- Simpson

De manière générale, si on considère l'intervalle $[-1, 1]$, on a

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^N w_i g(\xi_i),$$

où w_i sont les poids et $-1 \leq \xi_i \leq 1$ sont les nœuds de la quadrature. On montre que cette formule est exacte si $g \in \mathbb{P}_{2N-1}[-1, 1]$ si $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ sont les points de Gauss (racines du polynôme de Legendre). On a

- 1 point : $\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx 2g(0)$
- 2 points : $\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + g(\frac{1}{\sqrt{3}})$

- 3 points : $\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx \frac{5}{9}g\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$

Pour un intervalle quelconque $I = [a, b]$, par changement de variables

$$x = a + \frac{b-a}{2}(1 + \xi) \quad \text{ou} \quad \xi = \frac{x-a}{b-a} + \frac{x-b}{b-a}$$

on a

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 F\left(a + \frac{b-a}{2}(1 + \xi)\right) d\xi \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w_i F\left(a + \frac{b-a}{2}(1 + \xi_i)\right).$$

Quand on passe sur un triangle, il faut reprendre ces formules. On rappelle qu'on peut exprimer les coordonnées d'un point dans un triangle à partir de ses coordonnées barycentriques λ_1, λ_2 et λ_3 . Si on a un point $M(x, y)$, alors

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, \end{aligned}$$

soit encore comme $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$,

$$\begin{aligned} x &= (1 - \lambda_2 - \lambda_3)x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y &= (1 - \lambda_2 - \lambda_3)y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)\lambda_2 + (x_3 - x_1)\lambda_3 + x_1 \\ y &= (y_2 - y_1)\lambda_2 + (y_3 - y_1)\lambda_3 + y_1. \end{aligned}$$

Donc, l'application qui permet de passer d'un triangle de référence \hat{T} à un triangle T quelconque $F : \hat{T} \rightarrow T$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\int_T g(x, y) dx dy = \int_{\hat{T}} \underbrace{f(F(\lambda_2, \lambda_3))}_{G(\lambda_2, \lambda_3)} |det(P)| d\lambda_2 d\lambda_3.$$

On a déjà vu que $|det(P)| = 2\text{Aire}(T)$. On est donc ramené au calcul de

$$2\text{Aire}(T) \int_0^1 \int_0^{1-\lambda_2} G(\lambda_2, \lambda_3) d\lambda_2 d\lambda_3.$$

Une quadrature de Gauss de degré N pour les triangles est définie comme une quadrature qui est exacte pour tout polynôme de degré N

$$\int_{\hat{T}} G(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \approx \sum_{i=1}^{N_g} w_i G(\alpha_i, \beta_i),$$

où N_g est le nombre de points de Gauss.

En 2D, on a

$$\mathbb{P}_N(\alpha, \beta) = \text{Vect} \left\{ \alpha^k \beta^l, 0 \leq k, l, k+l \leq N \right\},$$

et $\dim(\mathbb{P}_N) = (N + 1)(N + 2)/2$. Ainsi,

$$\mathbb{P}_1 = \text{Vect} \{1, \alpha, \beta\}, \quad \mathbb{P}_2 = \text{Vect} \{1, \alpha, \beta, \alpha^2, \alpha\beta, \beta^2\}.$$

On rappelle que pour un 2-simplexe

$$\int_K \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m dx = \text{Volume}(K) \frac{k!l!m!2!}{(k + l + m + 2)!}.$$

Ici, le simplexe est \hat{T} et $k = 0$, d'où

$$\int_{\hat{T}} \underbrace{\lambda_2^l \lambda_3^m}_{=\alpha^l \beta^m} d\lambda_2 d\lambda_3 = \frac{l!m!}{(l + m + 2)!}.$$

On a donc

$$\int_{\hat{T}} \{1, \alpha, \beta, \alpha^2, \alpha\beta, \beta^2, \alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2, \beta^3\} d\alpha d\beta = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{60}, \frac{1}{60}, \frac{1}{20} \right\}.$$

Quadrature de degré 1 : elle doit être exacte pour $G(\alpha, \beta) = 1, \alpha, \beta$

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta) = 1 &\longrightarrow \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \\ G(\alpha, \beta) = \alpha &\longrightarrow \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \alpha_i \\ G(\alpha, \beta) = \beta &\longrightarrow \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \beta_i \end{aligned}$$

On voit que $N_g = 1$, $w_1 = 1/2$ et $\alpha_1 = \beta_1 = 1/3$ est solution d'où, pour tout $G \in \mathbb{P}_1$, on a

$$\int_{\hat{T}} G(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \frac{1}{2} G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (5.1)$$

Quadrature de degré 2 : elle doit être exacte pour $G(\alpha, \beta) = 1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ et β^2 . On a déjà les trois premières relations (voir ci-dessus), puis

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta) = \alpha^2 &\longrightarrow \frac{1}{12} = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \alpha_i^2 \\ G(\alpha, \beta) = \alpha\beta &\longrightarrow \frac{1}{24} = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \alpha_i \beta_i \\ G(\alpha, \beta) = \beta^2 &\longrightarrow \frac{1}{12} = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \beta_i^2 \end{aligned}$$

Il est évident que $N_g = 1$ ne peut pas fonctionner car on a 6 équations. En théorie, $N_g = 2$ peut fonctionner car on a 6 inconnues ($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, w_1, w_2$) mais on obtient une formule de quadrature non symétrique. On choisit $N_g = 3$. Cela conduit à 9 inconnues avec seulement 6 équations. La solution est donc non unique. On peut vérifier que

$$(\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \quad (\alpha_2, \beta_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), \quad (\alpha_3, \beta_3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right),$$

et $w_1 = w_2 = w_3 = 1/6$ est solution. On a donc pour tout $G \in \mathbb{P}_2$

$$\int_{\hat{T}} G(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \frac{1}{6} \left[G\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + G\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right]. \quad (5.2)$$

Comme la solution est non unique, on a aussi $(\alpha_1, \beta_1) = (0, 1/2)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1/2, 0)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (1/2, 1/2)$, $w_1 = w_2 = w_3 = 1/6$ et donc

$$\int_{\hat{T}} G(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \frac{1}{6} \left[G\left(0, \frac{1}{2}\right) + G\left(\frac{1}{2}, 0\right) + G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (5.3)$$

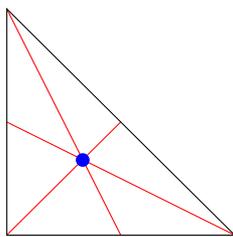
Pour \mathbb{P}_3 , la situation est identique avec non unicité des solutions. Par exemple, on a pour tout $G \in \mathbb{P}_3$

$$\int_{\hat{T}} G(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = -\frac{27}{96} G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{25}{96} \left(G\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) + G\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) + G\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \right), \quad (5.4)$$

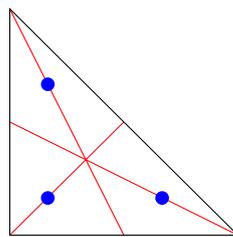
mais aussi

$$\int_{\hat{T}} G(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = -\frac{27}{96} G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{25}{96} \left(G\left(\frac{2}{15}, \frac{11}{15}\right) + G\left(\frac{2}{15}, \frac{2}{15}\right) + G\left(\frac{11}{15}, \frac{2}{15}\right) \right). \quad (5.5)$$

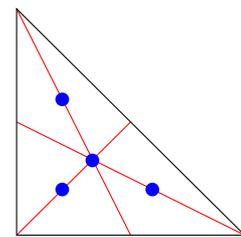
On représente le lieu des points de quadrature ci-dessous



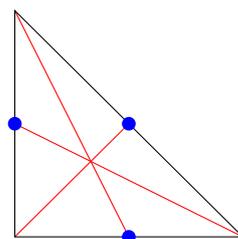
(5.1)



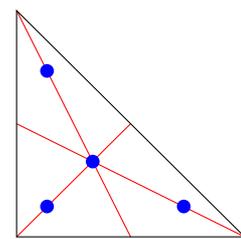
(5.2)



(5.3)



(5.4)



(5.5)



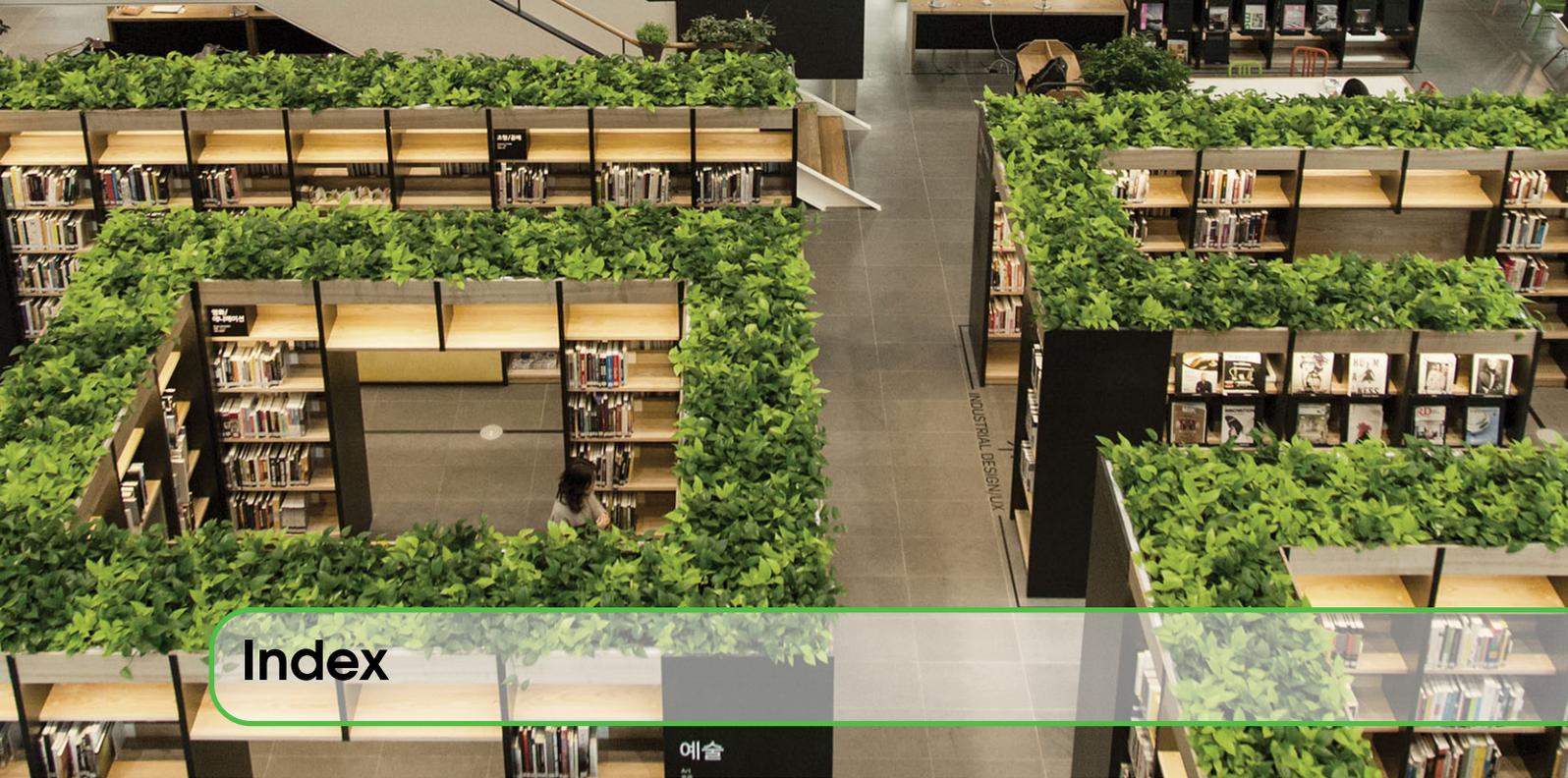
Bibliographie

Livres

- [1] Grégoire ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Ellipses, 2005.
- [2] Alexandre ERN. *Aide-mémoire Éléments finis*. Dunod, 2005.

Notes de cours

- [3] Antoine LEGAY. *Calcul des structures par éléments finis*. Rapport technique. Cnam Paris, 2017.



Index

A

assemblage 30

C

changement de variables 33
CL de Dirichlet homogènes 24
CL de Dirichlet inhomogènes 25
CL de Fourier-Robin 25
CL de Neumann 25
coordonnées barycentriques 17

E

espace de Sobolev 12

F

fonction chapeau 11
fonction de base 31
fonction de forme 31
Formules de Green 23

M

méthode des éléments finis 21
maillage 10, 15, 17

Q

quadratures 42

S

simplexe 16

T

treillis 20