Département de Mécanique
FSI - Université Paul Sabatier
Master *Mécanique et Energétique* - 1ère année
Module *Calcul Scientifique*

Année 2020-2021

Feuille de TD n°3

On note $\mathbb{P}_1$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 à deux variables scalaires x_1 et x_2

$$p \in \mathbb{P}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \text{pour tout } x = (x_1, x_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Si T est un triangle du plan de sommets M_1, M_2, M_3 non alignés, on appelle fonctions de forme $\mathbb{P}_1$ de T les polynômes p_i tels que $(i = 1, 2, 3)$:

$$p \in \mathbb{P}_1, \quad p_i(M_j) = \delta_{ij} \ (j = 1, 2, 3)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Exercice 1. Soit $\widehat{T}$ le triangle du plan de sommets

$$\widehat{M_1} = (0, 0), \quad \widehat{M_2} = (1, 0), \quad \widehat{M_3} = (0, 1).$$

$\widehat{T}$ est souvent appelé le triangle unité ou de référence.

1) Calculer les fonctions de forme $\widehat{p_i}$ de $\widehat{T}$.

2) Représenter le graphe des fonctions $\widehat{p_i}$ (le triangle $\widehat{T}$ sera représenté dans le plan horizontal et les valeurs des fonctions reportées sur un axe vertical).

Exercice 2. Soit T le triangle du plan de sommets

$$M_1 = (1, 1), \quad M_2 = (3, 2), \quad M_3 = (2, 3).$$

On note p *l'interpolé* défini par

$$p \in \mathbb{P}_1, \quad p(M_1) = 2, \ p(M_2) = 1, p(M_3) = 6.$$

1) Calculer le polynôme p.

2) Soit p_i les fonctions de forme du triangle T $(i = 1, 2, 3)$. Vérifier que le polynôme p peut s'écrire en fonction des p_i comme suit :

$$p(x) = 2p_1(x) + p_2(x) + 6p_3(x).$$

On admet que le polynôme d'interpolation p est unique. Commenter.

3) Représenter le graphe de la fonction p.

Exercice 3. Soit le domaine rectangulaire du plan $\Omega =]0, 1[\times]0, 2[$. On considère la triangulation indiquée sur la Figure 2 et indexée par $h = 1/2$. Sur cette figure est définie une numérotation des triangles $T_1, \cdots, T_{16}$ (nombres entourés), des nœuds intérieurs x^1, x^2, x^3 et des nœuds frontière $x^4, \cdots, x^{15}$.

On considère alors l'ensemble des fonctions continues sur le domaine, affines par morceaux sur la triangulation et nulles sur la frontière, c'est-à-dire

$$V_h = \left\{ v_h : v_h \in C^0(\Omega), \ v_h \text{ affine sur chaque } T_e \ (e = 1, \cdots, 16), \ v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Soit φ_n $(n = 1, 2, 3)$ les fonctions définies par

$$\varphi_n \in V_h, \quad \varphi_n(x^m) = \delta_{nm}, \ (m = 1, 2, 3)$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker.

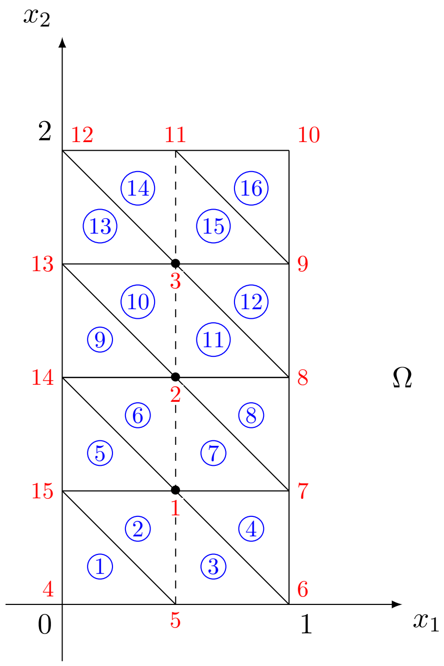

FIGURE 1 – Le domaine ainsi que la numérotation des triangles et des nœuds

1) Calculer la fonction φ_1 sur le triangle T_2. En déduire son vecteur gradient $\nabla\varphi_1$ sur T_2, en notant

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

2) Calculer φ_1 sur tout le domaine Ω, ainsi que $\nabla\varphi_1$.

3) Représenter le graphe φ_1 en reportant le domaine Ω sur le plan horizontal et les valeurs de la fonction sur l'axe vertical.

4) Soit la fonction w_h telle que

$$w_h \in V_h, \quad w_h(x^1) = 1,\ w_h(x^2) = 3,\ w_h(x^3) = 2.$$

Vérifier que

$$w_h(x) = \varphi_1(x) + 3\varphi_2(x) + 2\varphi_3(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

En déduire la valeur numérique de $w_h(y)$ où y est le point $y = (1/2, 3/4)$ du domaine.

Exercice 4. Soit le domaine triangulaire du plan Ω représenté sur la figure 2. On considère un maillage par 2-simplexes du domaine Ω. Ce maillage est la donnée de sommets et d'une table de connectivité indiqués ci-dessous

Sommets	x_1	x_2
x^1	0.5	0.5
x^2	1.0	0.5
x^3	0.5	1.0
x^4	0.0	1.5
x^5	0.0	1.0
x^6	0.0	0.5
x^7	0.0	0.0
x^8	0.5	0.0
x^9	1.0	0.0
x^{10}	1.5	0.0

2-simplexe	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3
T_1	7	8	6
T_2	8	1	6
T_3	8	9	1
T_4	9	2	1
T_5	9	10	2
T_6	6	1	5
T_7	1	3	5
T_8	1	2	3
T_9	5	3	4

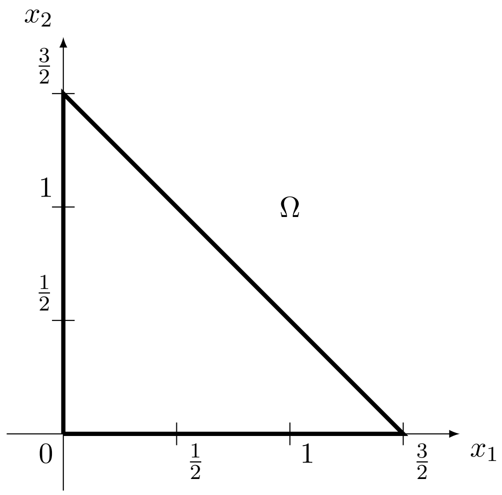

Figure 2 – le domaine Ω

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 1, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \partial_n u = 0, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1) Donner la formulation variationnelle du problème (1) sur un espace fonctionnel V que l'on précisera.

2) Représenter le maillage sur Ω.

3) On souhaite faire une approximation éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ du problème (1) sur ce maillage. Soit K un 2-simplexe. Donner la formule générale de la matrice de masse élémentaire associée à K.

4) Deux types de 2-simplexes sont présents dans le maillage. En utilisant les résultats du cours, donner les deux matrices de rigidité élémentaire pouvant être présentes dans le problème.

5) À l'aide des matrices élémentaires précédentes, former par assemblage la matrice du système linéaire.

6) Former le second membre.