Département de Mécanique
FSI - Université Paul Sabatier
Master *Mécanique et Energétique* - 1ère année
Module *Calcul Scientifique*

Année 2020-2021

Feuille de TD n°2

Exercice 1. On considère le problème aux limites suivant consistant à trouver une fonction $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u'(x) - u(x) = 1, \quad \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = 0, \ u'(1) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Soit $a < b$ deux nombres réels. On définit l'espace de fonctions

$$H^1(a,b) = \left\{ f \in C^0([a,b]) \middle| \int_a^b |f(x)|^2\, dx < +\infty \text{ et } \int_a^b |f'(x)|^2\, dx < +\infty \right\}.$$

1) Construire la formulation faible associée au problème (1) sur l'espace de fonctions

$$V = \{ f \in H^1(0,1) | f(0) = 0 \}.$$

2) Soit φ la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ & y & \longmapsto & x = (b-a)y + a. \end{array}$$

Soit f et g deux fonctions de $H^1(a,b)$ et F et G deux fonctions de $H^1(0,1)$ définies par $F(y) = f(\varphi(y))$ et $G(y) = g(\varphi(y))$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 F(y)\, G(y)\, (b-a)\, dy \tag{2}$$

et

$$\int_a^b f'(x)\, g'(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_0^1 F'(y)\, G'(y)\, dy. \tag{3}$$

3) On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en quatre sous intervalles réguliers

$$[0,1] = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$$

et on définit les sommets $x_j = j/4$, $0 \leq j \leq 4$. On identifie les sous intervalles par $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq 4$. On associe à cette subdivision l'espace d'approximation

$$V_h = \{ f \in V | f_{|I_j} \in \mathbb{P}_1, \ 1 \leq j \leq 4 \}$$

où $\mathbb{P}_1$ désigne l'espace des polynômes de degré 1.

(a)V_h est-il un espace vectoriel ?

(b)Quelle est la dimension est V_h ?

(c)Construire les fonctions "chapeaux" de base de V_h.

4) Construire la formulation éléments finis associée au problème faible.

5) Écrire le système linéaire à résoudre sans expliciter les coefficients de celui-ci.

6) Calculer les termes des différentes matrices associées au système linéaire en profitant des formules (2) et (3).

On appelle N-simplexe de $\mathbb{R}^N$ l'enveloppe convexe de $(N+1)$ points $(a_j)_{1\leq j\leq N+1} \in \mathbb{R}^N$, de coordonnées $(a_{i,j})_{1\leq i\leq N}$. On note K cet ensemble. Un N-simplexe K est non dégénéré si les points $(a_j)_{1\leq j\leq N+1} \in \mathbb{R}^N$ n'appartiennent pas à un même hyperplan de $\mathbb{R}^N$. Si K est un N-simplexe non dégénéré de sommets $(a_j)_{1\leq j\leq N+1} \in \mathbb{R}^N$, on définit les coordonnées barycentriques $(\lambda_j)_{1\leq j\leq N+1}$ associées à K d'un point $x \in \mathbb{R}^N$ par les relations

$$\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j}\lambda_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Exercice 2.

1) Représenter un 1-simplexe, un 2-simplexe et un 3-simplexe.

2) Représenter un 1-simplexe, un 2-simplexe et un 3-simplexe dégénéré.

3) Comment savoir à coup sur qu'un N-simplexe est non dégénéré ?

Exercice 3.

1) On considère K_1 le 1-simplexe de sommets 0 et 1. Calculer les coordonnées barycentriques associées à K_1 d'un point $x \in \mathbb{R}$?

2) Quelles sont les coordonnées barycentriques de 0 et de 1 ?

3) Quelles sont les coordonnées barycentriques de 1/3, 1/2, 3/4, 2, -1 ?

4) À partir des exemples ci-dessus, peut-on savoir en connaissant les coordonnées barycentriques d'un point $x \in \mathbb{R}$ si il appartient à K_1 ?

5) On considère maintenant $\tilde{K}_1$ le 1-simplexe de sommets 5 et 10. Calculer les coordonnées barycentriques associées à $\tilde{K}_1$ d'un point $x \in \mathbb{R}$?

6) Quelles sont les coordonnées barycentriques de 5, 7.5, 10, 0 ? Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

Exercice 4.

1) On considère K_2 le 2-simplexe de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Calculer les coordonnées barycentriques associées à K_2 d'un point $x \in \mathbb{R}$?

2) Quelles sont les coordonnées barycentriques de $(0,0)$, $(0,1)$ et de $(1,0)$?

3) Quelles sont les coordonnées barycentriques de $(1/3, 1/3)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$?

Exercice 5. On considère pour cet exercice un 2-simplexe K quelconque non dégénéré de sommets $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ et $M_3 = (x_3, y_3)$

1) Représenter les droites d'équations $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, puis $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 1/4$, $\lambda_3 = 1/2$.

2) Soit $M = (x, y)$ un point intérieur au 2-simplexe. Montrer que

$$\lambda_1 = \frac{2\,\text{Aire}(MM_2M_3)}{2\,\text{Aire}(K)}, \quad \lambda_2 = \frac{2\,\text{Aire}(MM_1M_3)}{2\,\text{Aire}(K)}, \quad \lambda_3 = \frac{2\,\text{Aire}(MM_1M_2)}{2\,\text{Aire}(K)}.$$