Département de Mécanique
FSI - Université Paul Sabatier
Année 2010-2021
Master *Mécanique et Energétique* - 1ère année
Module *Calcul Scientifique*

Feuille de TD n°1

Exercice 1. On considère l'équation de Navier-Stokes incompressible en 2 dimensions

$$\rho \partial_t \vec{V} + \rho \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V}$$

avec la contrainte $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$, où $\vec{V} = (u, v)$.

1) Montrer qu'il existe une fonction $\psi(x, y)$ telle que

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \end{pmatrix}.$$

2) Appliquer l'opérateur rotationnel à l'équation de Navier-Stokes et montrer que $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ vérifie le système

$$\begin{cases} \rho \partial_t \vec{\omega} + \rho \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\omega} = \mu \Delta \vec{\omega}, \\ \vec{\omega} = -\Delta \psi, \\ \vec{V} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi). \end{cases}$$

Exercice 2. On considère l'équation

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) = 1, \quad x \in [0, 1] \\ u(0) = 1, \ u'(1) = 0. \end{aligned}$$

On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en quatre sous intervalles réguliers

$$[0, 1] = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1].$$

Discrétiser le problème avec la méthode des différences finies d'ordre 2 et écrire le système linéaire.

Exercice 3. On considère le problème aux limites suivant consistant à trouver une fonction $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u'' = f \quad \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction donnée. On cherche une solution approchée de (1) obtenue par résolution d'un système linéaire à $n_{\max}$ inconnues scalaires. On commence par considérer le cas $n_{\max} = 2$.

1) L'intervalle $[0, 1]$ est subdivisé en

$$[0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1],$$

associé aux sommets $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ et $x_3 = 1$.

Soit V_h l'ensemble des fonctions continues $v_h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ affines sur chaque sous intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ et nulles en $x = 0$ et $x = 1$. On considère la fonction v_h telle que

$$v_h \in V_h, \qquad v_h(x_1) = 2, \qquad v_h(x_2) = -1. \tag{2}$$

La fonction v_h définie en (2) par sa valeur en deux points seulement x_1 et x_2 de l'intervalle $[0, 1]$ est elle determinée de manière unique en tout point $x \in [0, 1]$? Dessiner le graphe de la fonction v_h.

2) Montrer que si la fonction u est solution de (1), alors elle vérifie

$$u \in V, \qquad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \text{ pour tout } v \in V, \tag{3}$$

où V est un espace vectoriel de fonctions $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ suffisamment régulières et nulles en $x = 0, 1$. En remplaçant dans la formule (3) l'espace V par le sous-espace vectoriel V_h, on est conduit à s'intéresser au problème approché : trouver une fonction $u_h : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$u_h \in V_h, \qquad \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)\,dx \text{ pour tout } v_h \in V_h. \tag{4}$$

3) Donner l'expression analytique des fonctions φ_1 et φ_2 définies par

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 \in V_h, & \varphi_1(x_1) = 1, & \varphi_1(x_2) = 0, \\ \varphi_2 \in V_h, & \varphi_2(x_1) = 0, & \varphi_2(x_2) = 1. \end{array}$$

Représenter graphiquement ces deux fonctions.

4) On cherche la solution u_h sous la forme $u_h = q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2$ où les scalaires q_1, q_2 sont à déterminer. Montrer que le vecteur $U = (q_1, q_2)$ vérifie le système linéaire

$$KU = F \tag{5}$$

où la matrice K de taille 2×2 a pour coefficients $K_{m,n}$ et le vecteur second membre F a pour composantes F_n tels que

$$K_{m,n} = \int_0^1 \varphi_n'\varphi_m'\,dx, \qquad F_n = \int_0^1 f\varphi_n\,dx, \qquad m, n = 1, 2.$$

5) Calculer numériquement la matrice K et le vecteur F dans (5) lorsque $f = 1$. Résoudre alors le système linéaire (5). Représenter le graphe de la solution u_h du problème approché (4).

6) Indiquer comment procéder lorsque le nombre d'inconnues scalaires $n_{\max}$ est plus grand que 2. Quel est l'intérêt et quel est l'inconvénient de considérer $n_{\max}$ grand ?