Feuille de TD #2

Exercice 1 $\quad u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} -u'' + 2u' - u = 1 \quad , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 1 \end{cases}$$

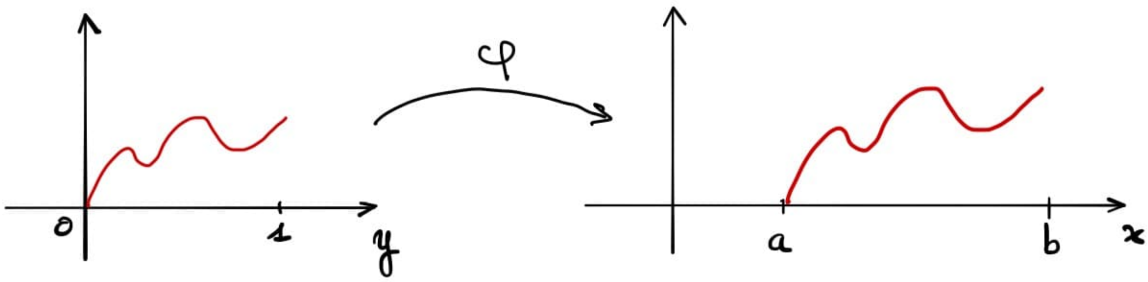
1- Formulation variationnelle $\quad V = \{ f \in H^1(0,1) \mid f(0) = 0 \}$

Trouver $u \in V$ telle que $\quad a(u,v) = \ell(v) \quad , \quad \forall v \in V$

où $\quad a(u,v) = \displaystyle\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx + 2 \int_0^1 u'(x)\, v(x)\, dx - \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$

et $\quad \ell(v) = \displaystyle\int_0^1 v(x)\, dx + v(1)$

2-



$\varphi(y) = x = (b-a)y + a$

$F(y) = f(\varphi(y)) \longrightarrow F'(y) = f'(\varphi(y))\, \varphi'(y)$ soit encore

$$f'(\varphi(y)) = \frac{F'(y)}{\varphi'(y)}$$

On a une relation similaire pour $G(y)$

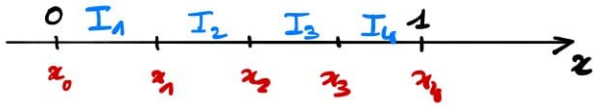
$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \underset{\substack{x = \varphi(y) \\ dx = \varphi'(y)\, dy}}{\overset{\text{changement de variable}}{=}} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y))\, g(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy = (b-a) \int_0^1 F(y)\, G(y)\, dy$$

$$\int_a^b f'(x)\, g'(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f'(\varphi(y))\, g'(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy = \int_0^1 F'(y)\, G'(y)\, \frac{\varphi'(y)}{(\varphi'(y))^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_0^1 F'(y)\, G'(y)\, dy$$

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{F'(y)}{\varphi'(y)}\, G(y)\, \varphi'(y)\, dy = \int_0^1 F'(y)\, G(y)\, dy$$

3- $x_j = j/4$, $0 \leq j \leq 4$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$



$V_h = \{ f \in V \mid f|_{I_j} \in \mathbb{P}_1, \ 1 \leq j \leq 4 \}$ Comme $f \in V$, on a $f(0) = 0$.

D'autre part, $f|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \iff f|_{I_j}(x) = \alpha_j x + \beta_j$, $1 \leq j \leq 4$

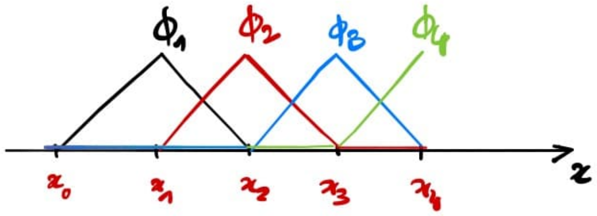
(a) Toute combinaison linéaire de fonctions de V_h est dans V_h, donc V_h est un espace vectoriel.

(b) Nous avons 4 intervalles I_j et nous considérons une approximation $\mathbb{P}_1$ par morceaux. Nous considérons donc des treillis de degré un sur chaque simplexe (= intervalle I_j). Nous avons donc 5 degrés de libertés (associé à chaque noeud compté une fois).

Or, $f(0) = 0 \rightarrow$ il ne reste que 4 degrés de liberté libres.

$\Rightarrow \dim V_h = 4$

(c)



On ne considère pas ϕ_0 associée à x_0 car $\phi_0 \notin V_h$. En effet, $\phi_0(0) = 1$.

Ainsi, $V_h = \mathrm{Vect}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$.

4- Trouver $u_h \in V_h$ telle que $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$

5- On sait que $u_h \in V_h$, ainsi, on peut écrire : $u_h(x) = \sum_{j=1}^{4} u_j \phi_j(x)$

et donc $u_h(x_j) = u_j$. Pour écrire le système linéaire, on remplace u_h dans la formulation éléments finis, et on fait prendre à v_h successivement les valeurs ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4.

$a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i)$, $1 \leq i \leq 4$. Comme a est une forme bilinéaire et ℓ une forme linéaire, on a :

$$\sum_{j=1}^{4} a(\phi_j, \phi_i)\, u_j = \ell(\phi_i), \quad 1 \leq i \leq 4$$

ce qui constitue un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues.

6- On sait que :

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx + 2\int_0^1 u'(x)\, v(x)\, dx - \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

$$l(v) = \int_0^1 v(x)\, dx + v(1)$$

$$a(\phi_j,\phi_i) = \underbrace{\int_0^1 \phi_j'(x)\, \phi_i'(x)\, dx}_{S_{ij}} + 2\underbrace{\int_0^1 \phi_j'(x)\, \phi_i(x)\, dx}_{K_{ij}} - \underbrace{\int_0^1 \phi_j(x)\, \phi_i(x)\, dx}_{M_{ij}}, \quad 1\leq i,j\leq 4$$

Pour $i<4$, on a

$$a(\phi_j,\phi_i) = \int_{I_i\cup I_{i+1}} \phi_j'(x)\, \phi_i'(x)\, dx + 2\int_{I_i\cup I_{i+1}} \phi_j'(x)\, \phi_i(x)\, dx - \int_{I_i\cup I_{i+1}} \phi_j(x)\, \phi_i(x)\, dx \quad (\mathrm{I})$$

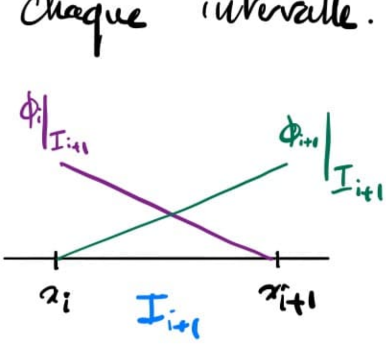
et pour $i=4$

$$a(\phi_j,\phi_4) = \int_{I_4} \phi_j'(x)\, \phi_4'(x)\, dx + 2\int_{I_4} \phi_j'(x)\, \phi_4(x)\, dx - \int_{I_4} \phi_j(x)\, \phi_4(x)\, dx \quad (\mathrm{II})$$

(I) est non nulle seulement pour $j = i-1,\ i$ ou $i+1$.

(II) est non nulle seulement pour $j=3$ ou $j=4$.

Afin de calculer tous les termes de $a(\phi_j,\phi_i)$, on va isoler les calculs sur chaque intervalle. Sur chaque intervalle coexistent deux fonctions de base



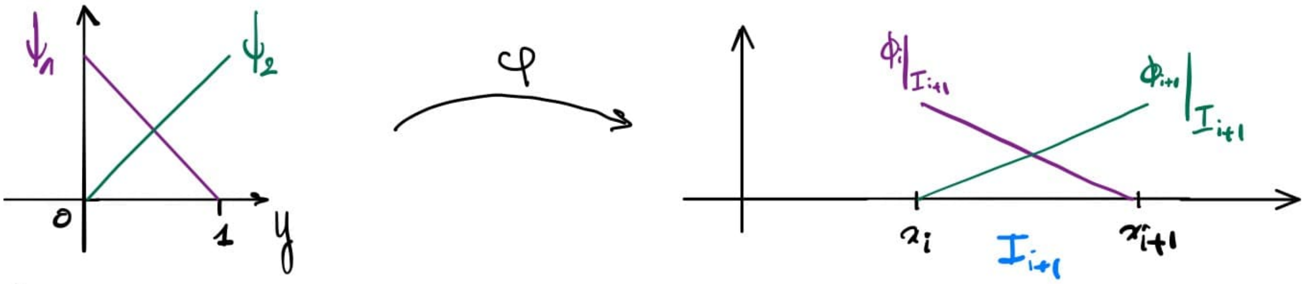
On est donc amené à considérer sur I_{i+1} les interactions entre

ϕ_i et ϕ_i, ϕ_i et ϕ_{i+1}, ϕ_{i+1} et ϕ_i et ϕ_{i+1} et ϕ_{i+1},

qui sont similaires pour tout intervalle. On les regroupe dans une matrice 2×2, que l'on appelle matrice d'assemblage local.

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c|c} \phi_i,\phi_i & \phi_{i+1},\phi_i \\ \hline \phi_{i+1},\phi_i & \phi_{i+1},\phi_{i+1} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ligne } i \\ \longleftarrow \text{ligne } i+1 \end{array} \end{array}$$

Comme ces interaction ne sont pas dépendantes de l'intervalle considéré, on se ramène à l'intervalle $[0,1]$ par le changement de variable φ vu à la question 2.



$\psi_1(y) = 1-y$ et $\psi_2(y) = y$

Calcul de la matrice de masse élémentaire : interactions $\int_0^1 \psi_i(y)\psi_j(y)dy$

$$Mel = \begin{pmatrix} \int_0^1 \psi_1\psi_1 \, dy & \int_0^1 \psi_2 \psi_1 \, dy \\ \int_0^1 \psi_1 \psi_2 \, dy & \int_0^1 \psi_2\psi_2 \, dy \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \psi_1^2(y)dy = \int_0^1 (1-y)^2 dy \underset{z=1-y}{=} \int_0^1 z^2 dz = [z^3/3]_0^1 = 1/3 = \int_0^1 \psi_2^2(y)dy$$

$$\int_0^1 \psi_1(y)\psi_2(y)dy = \int_0^1 (1-y)y\,dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1/6$$

$$Mel = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$, matrice symétrique

Calcul de la matrice de rigidité élémentaire : interactions $\int_0^1 \psi_i'(y)\psi_j'(y)dy$

$$\int_0^1 [\psi_1']^2 dy = \int_0^1 (-1)^2 dy = [y]_0^1 = 1 = \int_0^1 [\psi_2']^2 dy$$

$$\int_0^1 \psi_1'(y)\psi_2'(y)dy = \int_0^1 -1 \, dy = [-y]_0^1 = -1$$

$$Sel = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$, matrice symétrique

Matrice élémentaire liée aux interactions $\int_0^1 \phi_i'(y)\phi_j(y)\,dy$

$$K_{el} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \phi_1'\phi_1\,dy & \int_0^1 \phi_2'\phi_1\,dy \\ \int_0^1 \phi_1'\phi_2\,dy & \int_0^1 \phi_2'\phi_2\,dy \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \phi_1'(y)\phi_1(y)\,dy = \int_0^1 -(1-y)\,dy = \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_0^1 = -1/2$$

$$\int_0^1 \phi_1'(y)\phi_2(y)\,dy = \int_0^1 -y\,dy = \left[-y^2/2\right]_0^1 = -1/2$$

$$\int_0^1 \phi_2'\phi_1\,dy = \int_0^1 (1-y)\,dy = \left[y - y^2/2\right]_0^1 = 1/2$$

$$\int_0^1 \phi_2'\phi_2\,dy = \int_0^1 y\,dy = \left[y^2/2\right]_0^1 = 1/2$$

$$K_{el} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$, matrice non symétrique

On peut maintenant utiliser ces 3 matrices pour procéder à l'assemblage global des matrices. Pour cela, on se rappelle que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 F(y)G(y)\,dy \;;\; \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_0^1 F'(y)G'(y)\,dy$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_0^1 F'(y)G(y)\,dy$$

Pour obtenir les contributions des interactions des (ϕ_j, ϕ_i) pour les trois matrices, il faut : multiplier M_{el} par $(b-a) = x_{i+1} - x_i = h$

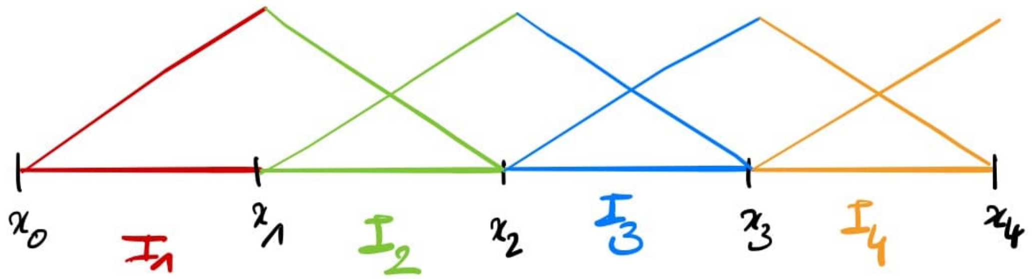
diviser S_{el} par $(b-a) = h$

rien à faire pour K_{el}

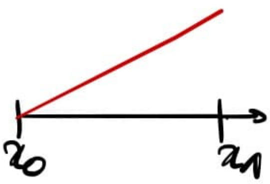
Utilisation des matrices élémentaires. **Matrice de masse**

$$\frac{h}{6}\;\begin{array}{c|cccc} & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \hline \phi_1 & 2 & 1 & & \\ \phi_2 & 1 & 2+2 & 1 & \\ \phi_3 & & 1 & 2+2 & 1 \\ \phi_4 & & & 1 & 2 \end{array}$$

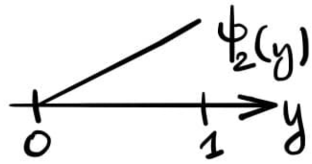
contribution de I_2
contribution de I_3
contribution de I_4



Cas particulier de l'élément I_1



correspond sur l'intervalle $[0,1]$ à



$$M_{el} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

on ajoute cette valeur à celle de la valeur présente en position $(1,1)$

$$\frac{h}{6}\;\begin{array}{c|cccc} & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \hline \phi_1 & 2+2 & 1 & & \\ \phi_2 & 1 & 2+2 & 1 & \\ \phi_3 & & 1 & 2+2 & 1 \\ \phi_4 & & & 1 & 2 \end{array}$$

contribution de I_1
contribution de I_2
contribution de I_3
contribution de I_4

La matrice de masse globale est donc $M = \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On procède de la même manière pour les deux autres matrices

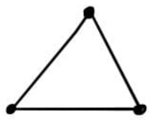
$$S = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1+1 & -1 & & \\ -1 & 1+1 & -1 & \\ & -1 & 1+1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

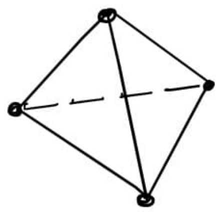
$$K = \begin{pmatrix} 1+-1 & 1 & & \\ -1 & 1+-1 & 1 & \\ & -1 & 1+-1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Feuille de TD #2

Exercice 2

1 - 1-simplexe　　2-simplexe　　3-simplexe





2 - 1-simplexe dégénéré　　2-simplexe dégénéré　　3-simplexe dégénéré

3 - Il suffit de construire la matrice $A \in M_{N+1}(\mathbb{R})$ contenant les coordonnées des $(N+1)$ sommets a_j en colonne et de compléter la dernière ligne de A par des 1.

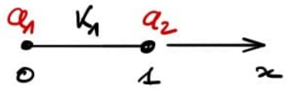
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & & a_{N,N+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

K est un N-simplexe non dégénéré si $\det A \neq 0$.

Feuille de TD #2

Exercice 3

1-



$$\begin{cases} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1\end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ det $A = -1 \longrightarrow K_1$ est non dégénéré et A est inversible.

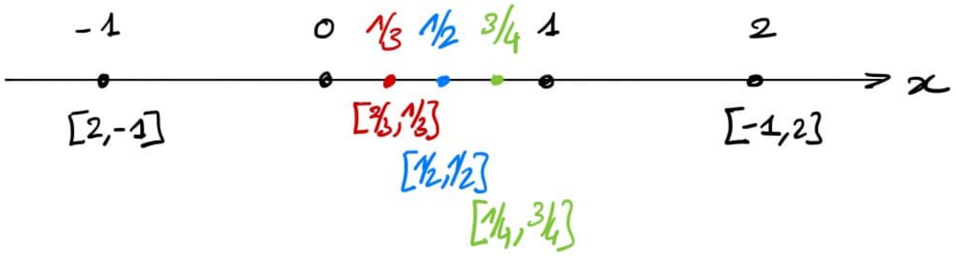
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 1\end{pmatrix}$$

d'où $\lambda_1(x) = 1 - x$ et $\lambda_2(x) = x$

2- Coordonnées barycentriques de a_1 : $[\lambda_1, \lambda_2] = [1, 0]$

" " de a_2 : $[\lambda_1 . \lambda_2] = [0, 1]$

3-

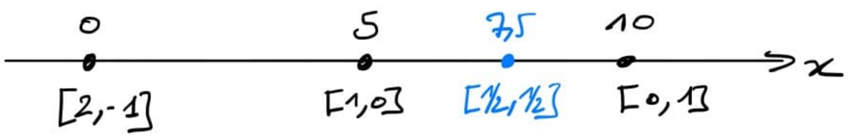


4- Un point $M \in K_1$ si $\lambda_1(M) \geq 0$ et $\lambda_2(M) \geq 0$.

5- $\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1\end{pmatrix}$ $a_1 = 5$ $a_2 = 10$ $\implies A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 1 & -5\end{pmatrix}$

d'où $\lambda_1(x) = -\frac{x}{5} + 2$ et $\lambda_2(x) = \frac{x}{5} - 1$

6-



Ces résultats étaient prévisibles car les coordonnées barycentriques sont indépendantes du système de coordonnées. On a fait subir une translation de 5 et une ~~dilatatation~~ dilatation de l'intervalle $[0,1] \longrightarrow$ les coordonnées barycentriques ne sont pas affectées.

Feuille de TD #2

<u>Exercice 1</u> $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} -u'' + 2u' - u = 1 \quad , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 1 \end{cases}$$

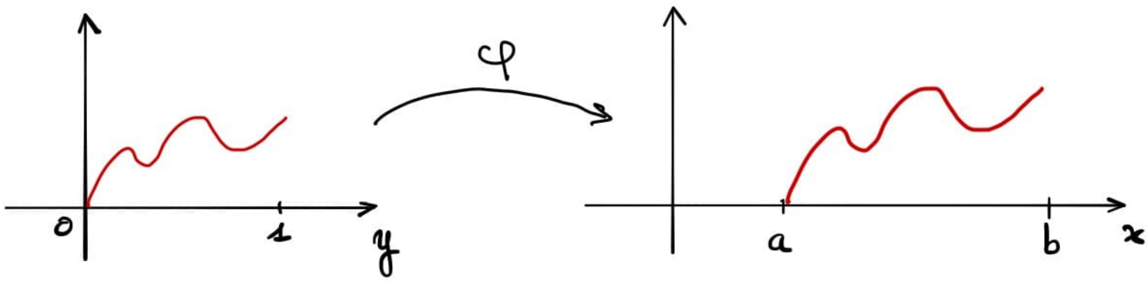
1- Formulation variationnelle $V = \{ f \in H^1(0,1) \mid f(0) = 0 \}$

Trouver $u \in V$ telle que $a(u,v) = \ell(v) \quad , \forall v \in V$

où $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx + 2\int_0^1 u'(x)\, v(x)\, dx - \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$

et $\ell(v) = \int_0^1 v(x)\, dx + v(1)$

2-



$\varphi(y) = x = (b-a)y + a$

$F(y) = f(\varphi(y)) \longrightarrow F'(y) = f'(\varphi(y))\, \varphi'(y)$ soit encore

$$f'(\varphi(y)) = \frac{F'(y)}{\varphi'(y)}$$

On a une relation similaire pour $G(y)$

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \underset{\substack{x = \varphi(y) \\ dx = \varphi'(y)\, dy}}{\overset{\text{changement de variable}}{=}} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y))\, g(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy = (b-a)\int_0^1 F(y)\, G(y)\, dy$$

$$\int_a^b f'(x)\, g'(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f'(\varphi(y))\, g'(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy = \int_0^1 F'(y)\, G'(y)\, \frac{\varphi'(y)}{(\varphi'(y))^2}\, dy$$

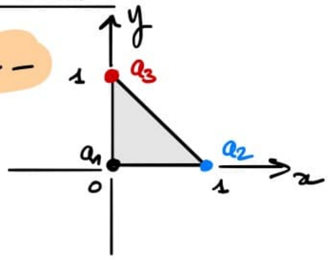
$$= \frac{1}{b-a} \int_0^1 F'(y)\, G'(y)\, dy$$

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{F'(y)}{\varphi'(y)} G(y)\, \varphi'(y)\, dy = \int_0^1 F'(y)\, G(y)\, dy$$

Feuille de TD #2

Exercice 4

1 –



$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \ \det A = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ainsi $\begin{cases} \lambda_1(x,y) = 1 - x - y \\ \lambda_2(x,y) = x \\ \lambda_3(x,y) = y \end{cases}$

2- $a_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = [1, 0, 0]$; $a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow [0, 1, 0]$; $a_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow [0, 0, 1]$

3 – $M\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \longrightarrow [1/3, 1/3, 1/3]$; $M\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow [2, -1, 0]$; $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow [-1, 1, 1]$

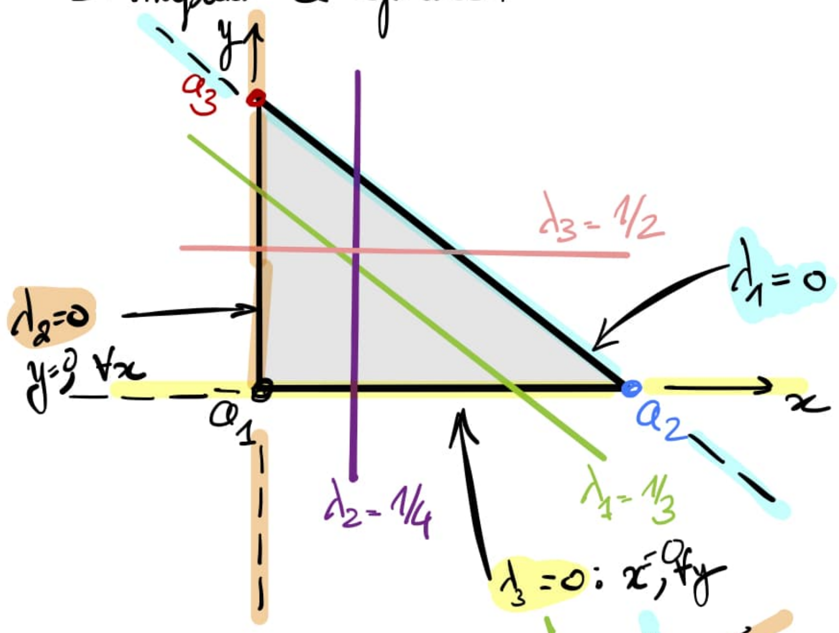
Pour un point $M \notin K_2$, on a au moins une coordonnée barycentrique négative.

Feuille de TD #2

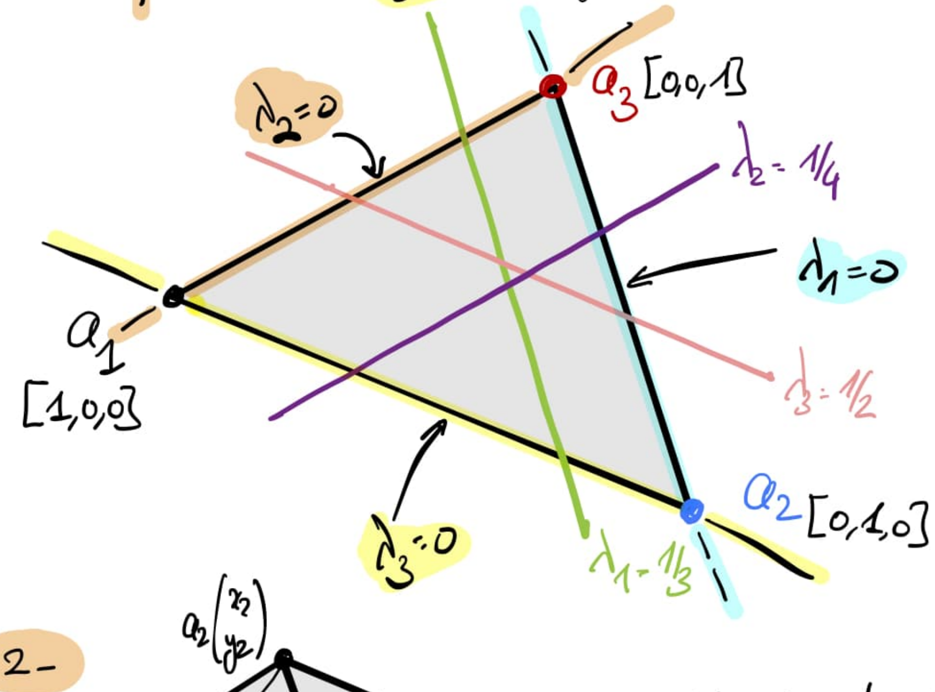
Exercice 5

1 – On sait que les coordonnées barycentriques associées à deux 2-simplexes non dégénérés ne dépendent que de la position du point M considéré relativement aux sommets. Ainsi, étudier la position de droites dans le plan peut se faire sur le 2-simplexe de référence.

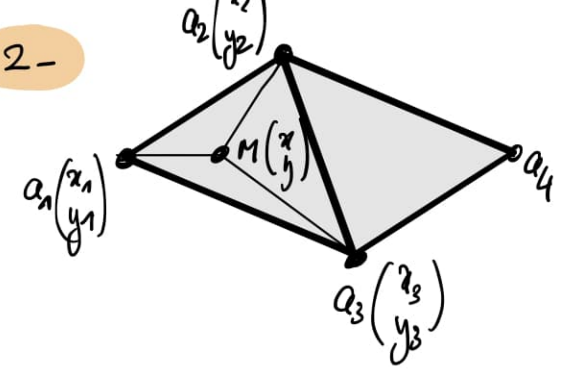
$$\lambda_1(x,y) = 1 - x - y$$
$$\lambda_2(x,y) = x$$
$$\lambda_3(x,y) = y$$



$$\lambda_1 = \frac{1}{3} \iff y = \frac{2}{3} - x$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \iff x = 1/4 \quad \forall y$$
$$\lambda_3 = 1/2 \iff y = 1/2 \quad \forall x$$



2 –



K : 2-simplexe (a_1, a_2, a_3)

Coordonnées barycentriques de M

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\Lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{X}$$

K non dégénéré $\quad \det A \neq 0$

On sait que l'aire du parallélogramme (a_1, a_2, a_3, a_4) est donnée par $\|\overrightarrow{a_1a_2} \wedge \overrightarrow{a_1a_3}\|$

Donc, $\text{aire}(\underbrace{a_1a_2a_3}_{K}) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{a_1a_2} \wedge \overrightarrow{a_1a_3}\| \Rightarrow \text{aire}(\underbrace{a_1a_2a_3}_{K}) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}\right|$

On note $|K|$ l'aire du 2-simplexe K. On a donc

$$|K| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|\det A|$$

Aussi, $|\det A| = 2|K|$

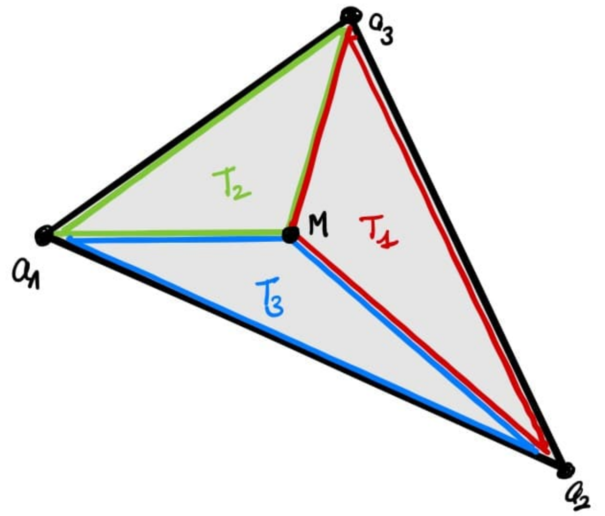
Un calcul simple donne

$$A^{-1} = \frac{1}{2|K|}\begin{pmatrix} y_2-y_3 & x_3-x_2 & x_2y_3-x_3y_2 \\ y_3-y_1 & x_1-x_3 & x_3y_1-x_1y_3 \\ y_1-y_2 & x_2-x_1 & x_1y_2-y_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2|K|}\left[(y_2-y_3)x + (x_3-x_2)y + (x_2y_3-x_3y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2|K|}\left|\det\begin{pmatrix} x_2-x & x_3-x \\ y_2-y & y_3-y \end{pmatrix}\right| = \frac{\|\overrightarrow{Ma_2} \wedge \overrightarrow{Ma_3}\|}{2|K|} = \frac{2\,\text{Aire}(MM_2M_3)}{2|T|}$$

On a de même $\lambda_2 = \dfrac{2\,\text{Aire}(MM_3M_1)}{2|K|}$ et $\lambda_3 = \dfrac{2\,\text{Aire}(MM_1M_2)}{2|K|}$



On a $\lambda_i = \dfrac{|T_i|}{|K|}$ → cela donne un moyen algorithmique simple pour calculer les λ_i dans une méthode éléments finis.