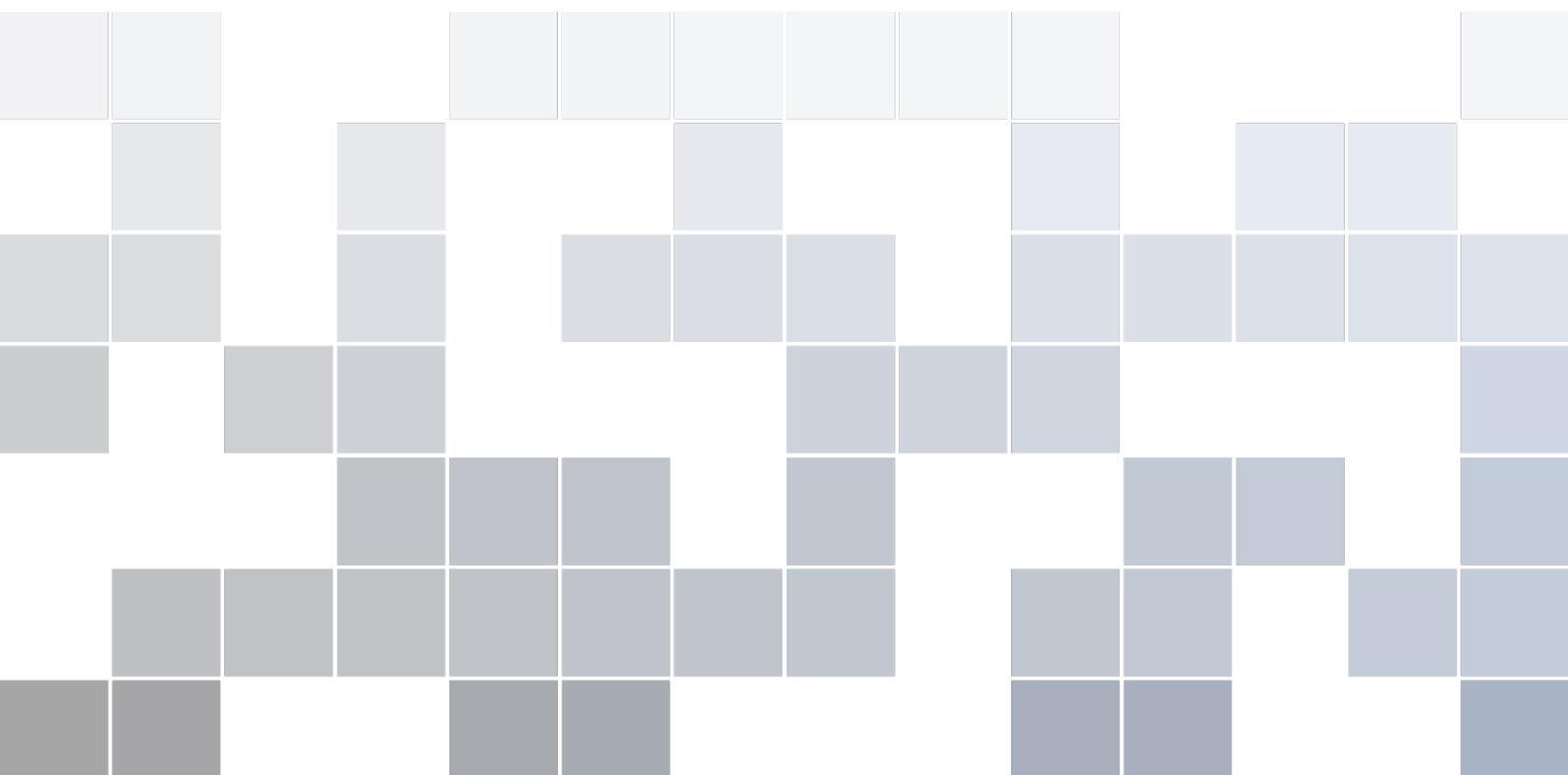


Signal, Fourier, Image

L3 Mapi³

Christophe Besse



Copyright © 2020 Christophe Besse

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

Second printing, September 2020



Table des matières

1	Introduction : Signaux et Images	5
1.1	Analogique et Digital	5
1.2	Image numérique	8
1.3	Quelques outils basiques pour le traitement du signal	9
1.3.1	Changement de variables	9
1.3.2	Une somme finie importante	9
1.3.3	Somme d'une suite périodique	10
1.4	Opérations mathématiques	11
1.4.1	La convolution	11
1.4.2	Le fenêtrage	16
1.4.3	L'échantillonnage	16
1.4.4	Le bruit	17
1.4.5	La quantification	17
1.5	Traitement ponctuel des images numériques	19
2	La transformée de Fourier	25
2.1	Compléments mathématiques	25
2.1.1	Fonctions et intégrations	25
2.1.2	Espaces de Banach et de Hilbert	26
2.1.3	Base des espaces de Hilbert	28
2.1.4	Dirac	35
2.2	La transformée de Fourier	36
2.2.1	Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$	36
2.2.2	Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$	39
2.2.3	Propriétés	41

3	La révolution discrète	45
3.1	Échantillonnage des signaux analogiques	45
3.1.1	Théorème d'échantillonnage de Shannon-Whittaker	45
3.1.2	Aliasing	47
3.1.3	Échantillonnage général	50
3.2	Fourier et les signaux discrets	52
3.2.1	Série de Fourier	52
3.2.2	Signaux finis	52
3.2.3	La transformée de Fourier rapide	56
3.2.4	Sous-échantillonnage	60
3.2.5	Le théorème de Shannon pour les suites finies	61
4	Analyse temps-fréquence	63
4.1	La transformée de Fourier à fenêtre	63
4.2	La transformée en ondelettes	67
4.2.1	Ondelettes continues	68
4.2.2	Transformations dyadiques	71
4.2.3	Analyse multirésolution	71
4.2.4	Transformée en ondelettes rapide	77
4.2.5	La transformée en ondelettes pour les images	80
	Bibliographie	83
	Livres	83
	Index	85



1. Introduction : Signaux et Images

1.1 Analogique et Digital

Un signal analogique désigne un phénomène physique à valeurs réelles ou complexes mesuré dans un système d'unité. Le phénomène dépend en général d'une variable, par exemple le temps. Lorsqu'il dépend de deux variables (espace 2D), on parle d'image analogique.

Un signal analogique est donc représenté par une fonction

$$\begin{aligned} x : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ t &\longmapsto x(t). \end{aligned}$$

Si $x(t) \in \mathbb{C}$, on écrit $x(t) = u(t) + iv(t) = \operatorname{Re}(x(t)) + i\operatorname{Im}(x(t)) = a(t)e^{i\varphi(t)}$ avec $a(t) \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi(t) \in [-\pi, \pi[$. $a(t) = \sqrt{u^2 + v^2}$ est l'amplitude et φ la phase.

Une image analogique est de même représentée par

$$\begin{aligned} U : X \times Y \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto U(x, y). \end{aligned}$$

Une vidéo analogique serait quand à elle représentée par

$$\begin{aligned} V : I \times X \times Y \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto V(t, x, y). \end{aligned}$$

Un signal ou une image correspond donc à un phénomène physique mesuré. Par exemple la quantité $\sqrt{u^2 + v^2}$ peut être une différence de potentiel étalonnée en Volt, une intensité (Ampère), une intensité sonore (en Bel), une température (en degré), ... Lorsque l'on mesure des phénomènes physiques, ou lorsque l'on fait des photos, ou lorsque l'on fait des vidéos, on ne peut faire ces mesures à tous les temps de $t \in I$. Pour des raisons pratiques (impossibilités de mesurer tous les temps continus), ces signaux analogique sont mesurés suivant un maillage du temps de pas τ . Si ce pas $\tau = 1/F$, avec $F \in \mathbb{N}^*$, on dit que le signal a été échantillonné à F Hertz.

Définition 1.1.1 Un signal analogique est dit échantillonné à F Hertz si le nombre d'échantillons du signal collectés par seconde lors de la mesure (ou enregistrement) de ce signal est égale à F .

- **Exemple 1.1**
- Si on mesure la vitesse d'un véhicule 10 fois par seconde, on fait un échantillonnage à 10 Hz .
 - Si on mesure la température d'une pièce 1 fois par minute, on fait un échantillonnage à $1/60 \text{ Hz}$.
-

Un autre phénomène important est qu'il est impossible de faire une mesure exactement à un temps $t_0 \in \mathbb{R}$. Ce que l'on convient de considérer comme grandeur mesurée $X(t)$ est la « valeur moyenne »

$$[x(t)]^{\varphi, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right) x(\tau) d\tau,$$

où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ est une fonction paire, assez régulière (au minimum continue par morceaux) telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau) d\tau = 1$ (masse 1) et ε est un seuil strictement positif choisi suffisamment petit (précision temporelle de l'appareil de mesure).

Fonctions φ usuelles

- Fonction créneau

$$\varphi(t) = \Pi_1(t) = \begin{cases} 1, & -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Gaussienne normalisée $\varphi(t) = g(t) = e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

On a pour Π_1

$$\begin{aligned} [x(t)]^{\varphi, \varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{-1/2 \leq \frac{t-\tau}{\varepsilon} \leq 1/2} x(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon/2}^{t+\varepsilon/2} x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité représente la moyenne autour de t de $x(\cdot)$ sur l'intervalle centré en t de longueur ε .

Pour la Gaussienne, on trouve

$$[x(t)]^{g, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2\varepsilon^2}} x(\tau) d\tau.$$

On sait que la fonction

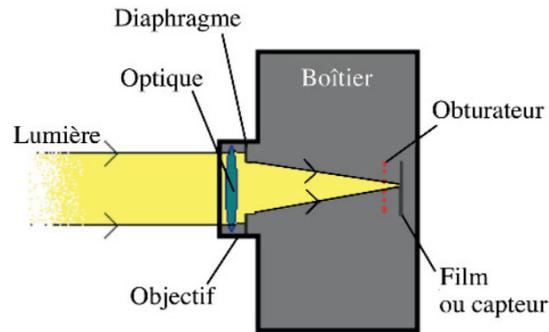
$$n(t, \sigma, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

est une gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ . Ainsi,

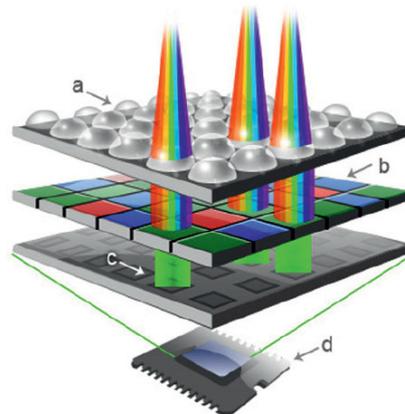
$$[x(t)]^{g, \varepsilon} = \int_{\mathbb{R}} n(t, \varepsilon, \tau) x(\tau) d\tau.$$

Ainsi, au lieu de faire une moyenne sur un intervalle précis $[t - \varepsilon/2, t + \varepsilon/2]$ avec Π_1 , on fait une moyenne toujours centrée autour de t , mais avec une Gaussienne d'écart type ε . La fonction g est plus régulière que Π_1 (on peut calculer ses dérivées par exemple).

Pour ce qui est des images, l'échantillonnage et la moyenne sont aussi présents lors des prises de vues. Le principe de l'acquisition est le même que l'on fasse de la photographie argentique ou numérique.



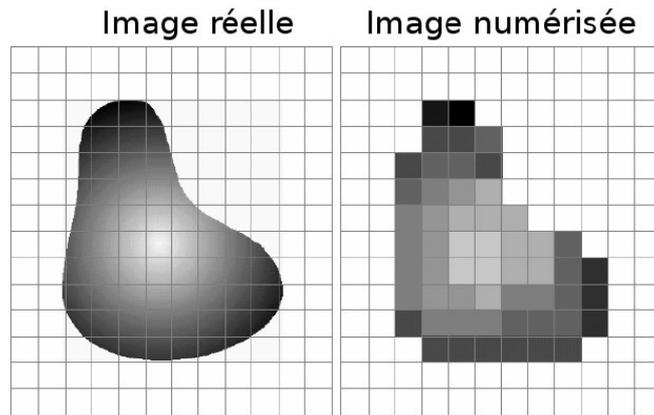
Dans un appareil photo argentique, l'image se forme sur un film transparent argentique sur lequel est déposée une couche photosensible de grains d'argent. Chimiquement activé par la lumière, il se forme alors une image. Sur une pellicule à grains fins, la taille moyenne d'un grain d'argent est d'environ $20\ \mu\text{m}$. Une pellicule photo a une taille de $24 \times 36\ \text{mm}$ ce qui donne une quantité de 2 millions de grains.



Les capteurs numériques remplacent les grains d'argent par des senseurs (photosites) CCD (Charge-Couples Device ou dispositif à transfert de charges). Les informations lumineuses frappent chacun des éléments du capteur qui constitue la surface sensible de l'appareil pour être transformées en courant électrique variable. Dans un téléphone portable de type iPhone XR, XS ou 11, la taille du capteur est de $5.64 \times 4.23\ \text{mm}$ avec des CCDs d'une tailles de $1,4\ \mu\text{m}$. Une photo est donc constituée de 4032×3024 pixels soit environ 12 millions. Un pixel désigne un élément d'une image (PICTure Element) qui correspond ici à la taille d'un CCD.

Durant la phase d'acquisition d'une image, on passe donc d'une phase continue à une phase discrète par

- un échantillonnage (nombre fini de points)
- une opération de moyenne (durée de temps d'exposition de la photo)
- une quantification (on ne peut coder qu'un nombre fini de nuances de couleurs).



Il y a donc une perte d'information.

1.2 Image numérique

On ne considère ici que les images numériques dites matricielles (celles qui proviennent d'appareils photo). Une image matricielle (ou bitmap) est composée d'une matrice (tableau) de points à plusieurs dimensions. Une image numérique est un objet discret défini sur une grille à deux dimensions. Elle est donc définie sur un ensemble $\{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\}$, $M, N \in \mathbb{N}^*$. Les éléments de la grille s'appellent pixels. Pour chaque point de cette grille, on affecte une couleur. Dans ce cours et les travaux pratiques, nous travaillerons avec des images en 256 niveaux de gris (chaque pixel est donc codé sur 1 octet=8bits). On définit donc un ensemble fini $\text{Col} \subset \mathbb{R}$ qui représente les couleurs. Ici, cela correspond à

$$\text{Col} = \{0, 1, \dots, 255\}.$$



Noir et blanc



Niveaux de Gris



Couleurs

Ainsi, une image est une application

$$\begin{aligned} u : \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\} &\longrightarrow \text{Col} \\ (m, n) &\longmapsto u_{m,n}. \end{aligned}$$

Comme finalement on travaille sur un sous ensemble de \mathbb{N}^2 , u peut aussi être identifiée à une suite. On utilisera donc indifféremment les termes image, fonction et suite.

Lorsque les images sont carrées, $M = N$.

1.3 Quelques outils basiques pour le traitement du signal

Nous avons vu que l'on peut représenter une image sous la forme d'une suite à deux termes. Il est serait de même pour un signal numérique (suite à un terme). Dans la suite du cours, il arrivera que l'on considère les signaux ou images comme périodiques ce qui permet aux indices des suites de ne plus être limités à l'ensemble $\{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mais de travailler sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ou \mathbb{Z} pour un signal).

1.3.1 Changement de variables

Soit $E \subset \mathbb{Z}$ (ou dans \mathbb{Z}^2) un ensemble et $(a_e)_{e \in E} \in \mathbb{C}^E$ une suite de nombres.

■ **Exemple 1.2** $E = \{-2, 0, 1\}$ et $(a_e)_{e \in E} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. ■

Considérons la somme

$$S = \sum_{e \in E} a_e.$$

S , qui est une somme finie, ne dépend pas de notre façon de décrire les éléments de E . Ainsi par exemple, pour $E \subset \mathbb{Z}$, on peut écrire

$$E = E_1 \cup E_2,$$

où

$$E_1 = E \cap \{2n \in \mathbb{Z} | n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad E_2 = E \cap \{2n+1 \in \mathbb{Z} | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour notre exemple, $E_1 = \{-2, 0\}$ et $E_2 = \{1\}$.

On a donc aussi

$$S = \sum_{e \in E} a_e = \sum_{e \in E_1} a_e + \sum_{e \in E_2} a_e.$$

Cette égalité est particulièrement utile pour deux égalités que nous utiliserons dans le cours

• Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $(a_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^N$:

$$\sum_{n=1}^{2N} a_n = \sum_{n=1}^N a_{2n-1} + \sum_{n=1}^N a_{2n}.$$

• Pour tout $K \in \mathbb{N}$, tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $(a_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^{KN}$:

$$\sum_{n=1}^{KN} a_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^K a_{Kn+k}.$$

1.3.2 Une somme finie importante

Soit $a \neq 1$ et $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=1}^N a^k = \frac{a^{N+1} - a}{a - 1}.$$

La preuve repose sur

$$\begin{aligned} (a-1) \sum_{k=1}^N a^k &= a(a^N + a^{N-1} + \dots + a^2 + a) \\ &\quad - (a^N + a^{N-1} + \dots + a^2 + a), \\ &= a^{N+1} + a^N + \dots + a^2, \\ &\quad - a^N - \dots - a^2 - a, \\ &= a^{N+1} - a. \end{aligned}$$

Par une preuve similaire, on a

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{a^N - 1}{a - 1}.$$

Une utilisation intéressante de cette somme est lorsque a est une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité (i.e. telle que $a^N = 1$). Si $a \in \mathbb{C}$, alors $a = \rho e^{i\theta}$ et $\rho = 1$ et $e^{iN\theta} = 1$ ce qui conduit à $N\theta = 2m\pi$. On a donc une infinité de racines $N^{\text{ième}}$ de l'unité et si l'on veut celles dont l'argument principal appartient à $[0, 2\pi[$, on prend

$$e^{2i\pi \frac{m}{N}}, \quad m \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Donc, si $a^N = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^N a^k = \frac{a^{N+1} - a}{a - 1} = \frac{a - a}{a - 1} = 0.$$

1.3.3 Somme d'une suite périodique

Pour un signal, on considère $N \in \mathbb{N}$ avec $N > 0$ et une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Définition 1.3.1 On dit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique de période N si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$v_n = v_{n+N}.$$

Ainsi, $v_{n+2N} = v_{(n+N)+N} = v_{n+N} = v_n$ et plus généralement, on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad v_n = v_{n+kN}.$$

Rappelons que si $n \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{Z}$, alors la division Euclidienne de n par N est définie par la donnée de l'unique couple formé d'un quotient $q \in \mathbb{Z}$ et d'un reste $r \in \{0, \dots, N-1\}$ tels que

$$n = qN + r.$$

Ainsi, $r = n - qN$. Posons $q = -k$ et on a $r = n + kN$. Alors, comme $v_n = v_{n+kN}$, on a $v_n = v_r$ où r est le reste de la division entière de n par N . On note $r = n[N]$, que l'on lit n modulo N , et on a finalement

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, \quad v_n = v_{n[N]},$$

avec $n[N] \in \{0, \dots, N-1\}$.

Ainsi toute la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est entièrement déterminée par ses N valeurs d'indice $n \in \{0, \dots, N-1\}$ ou plus généralement par ses valeurs sur une période quelconque.

Plutôt que de disposer de la suite complète $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on peut aussi la périodiser. Soit $(w_n)_{0 \leq n \leq N-1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on périodise la suite en posant

$$w_n = w_{n[N]}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pour une telle suite périodique, on a la propriété suivante :

Proposition 1.3.1 Pour $N \in \mathbb{N}$ et pour toute suite périodique $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de période N , on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=k}^{k+N-1} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n.$$

Cette proposition dit simplement la somme de N éléments consécutifs d'une suite périodique ne dépend pas de la période sur laquelle on fait cette somme.

De même, pour les images (dimension 2), on a

Proposition 1.3.2 Pour $(M, N) \in \mathbb{N}^2$, on dit que la suite $(v_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ est périodique de période (M, N) si

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad v_{m,n} = v_{m+M, n+N} = v_{m+M, n} = v_{m, n+N}.$$

Proposition 1.3.3 Pour $(M, N) \in \mathbb{N}^2$ et pour toute suite périodique $(v_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ de période (M, N) , on a pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$\sum_{m=k_1}^{k_1+M-1} \sum_{n=k_2}^{k_2+N-1} v_{m,n} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} v_{m,n}.$$

1.4 Opérations mathématiques pour transformer une image analogique en image numérique

1.4.1 La convolution

On a déjà rencontré cette opération dans le premier paragraphe. On a vu qu'un appareil ne pouvait pas saisir un phénomène à un instant t précis. De même, on ne peut pas capturer l'infinité des points de l'espace d'une scène par photographie. On doit faire des opérations de moyenne. Mathématiquement, cette opération s'appelle convolution. Pour définir la convolution, on a besoin des espaces fonctionnels de Lebesgue. Ces espaces seront définis précisément dans le module « Intégration, théorie de la mesure, probabilité ».

Soient f et g deux fonctions réelles mesurables sur \mathbb{R}^d telles que $f(x) = g(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle : on dit que $f = g$ presque partout (noté p.p). C'est une classe d'équivalence.

Définition 1.4.1 On appelle, pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions définies p.p et telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty.$$

On appelle $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions définies p.p tel que il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|f(x)| \leq C, \quad \text{p.p } x \in \mathbb{R}^d.$$

La plus petite constante C pour laquelle cette relation est vraie s'appelle le « sup essentiel » de $|f(x)|$ et on le note $\|f\|_{L^\infty}$.

On définit la norme de L^p par

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx.$$

Définition 1.4.2 Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, le produit de convolution $f * g$ est défini par

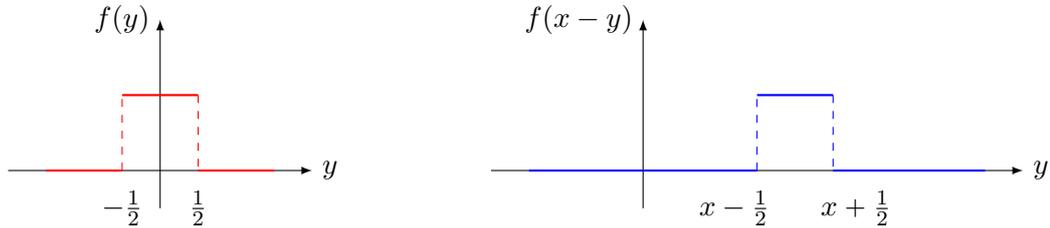
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y) dy.$$

En outre, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Quand on applique une convolution, on dit qu'on filtre f par g (resp. g par f) et on dit que g est un filtre (resp. f).

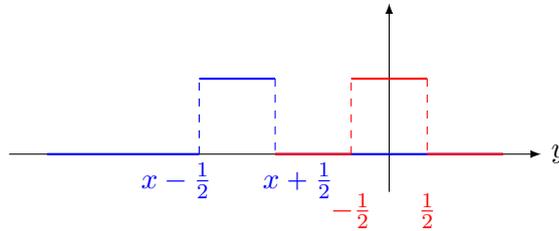
■ **Exemple 1.3** Considérons la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(x)$



$$(f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(x-y) \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(y) dy.$$

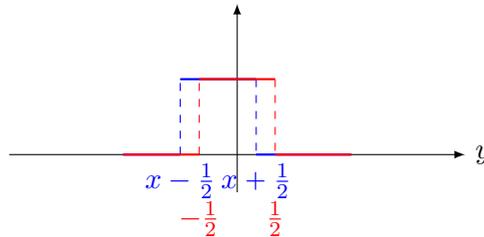
Pour réaliser ce calcul, on décompose en plusieurs cas.

- Cas 1 : $x + \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$ ce qui équivaut à $x \leq -1$



alors, les supports de $f(x-y)$ et $f(y)$ sont disjoints ce qui conduit à une intégrale nulle :
 $f * f(x) = 0.$

- Cas 2 : $-1 < x < 0$



La zone de recouvrement des supports est l'intervalle $[-1/2, x + 1/2]$, alors

$$f * f(x) = \int_{-1/2}^{x+1/2} dy = x + 1.$$

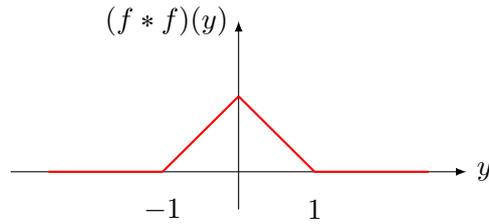
- Cas 3 $x = 0$. Dans ce cas, $f(y)$ et $f(x-y)$ sont confondues et on a

$$f * f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dy = 1.$$

- Cas 4 $0 < x < 1$, on a de même $f * f(x) = 1 - x.$
- Cas 5 $x \geq 1$, $f * f(x) = 0.$

On a donc

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$



Conclusion : on est parti d'une fonction f discontinue et $(f * f)$ est continue. La convolution régularise. En outre, le support a grandi. ■

La formule de convolution est donnée pour \mathbb{R}^D et donc applicable en 2D. Comme on l'a dit, lors d'une prise de vue d'une image, on moyennise autour d'un point pour affecter la couleur à ce point. Si v est l'image de départ, et $h(x, y) = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]^2}(x, y)$, alors

$$\begin{aligned} (h * v)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - x', y - y') v(x', y') dx' dy' \\ &= \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_{x-1/2}^{x+1/2} v(x', y') dx' dy'. \end{aligned}$$

Il s'agit bien de la moyenne de v sur un carré de côté 1, centré en (x, y) . Modifier le support de h revient à changer le support sur lequel on fait la moyenne. Il est important de noter que l'opération de moyenne ne dépend que de h et reste la même pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En revanche, pour que la convolution soit bien une opération de moyennisation, on demande que $\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$.

Proposition 1.4.1 Pour tout filtre $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, l'opérateur de convolution avec h est un opérateur linéaire.

Preuve Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned} (h * (\alpha u + \beta v))(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x - y)(\alpha u(y) + \beta v(y)) dy \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^d} h(x - y)u(y) dy + \beta \int_{\mathbb{R}^d} h(x - y)v(y) dy \\ &= \alpha h * u + \beta h * v. \end{aligned}$$

Soit τ_p l'opérateur de translation défini pour tout $p \in \mathbb{R}^d$ par $\tau_p v(t) = v(t - p)$. On a le résultat

Proposition 1.4.2 Pour tout filtre $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, l'opérateur de convolution avec h est invariant par translation. Pour tout $v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{R}^d$, on a

$$h * (\tau_p v) = \tau_p (h * v).$$

Preuve

$$\begin{aligned}
(h * (\tau_p v))(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x-y) \tau_p v(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} h(x-y) v(y-p) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} h(x-(z+p)) v(z) dz, \quad \text{par changement de variable } z = y-p, \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} h((x-p)-z) v(z) dz = (h * v)(x-p) = \tau_p(h * v)(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, faire une translation puis une convolution revient au même que faire une convolution puis une translation. La convolution commute avec les opérateurs de translation ou encore la convolution est invariante par translation.

L'opération de moyennisation que l'on fait subir aux signaux ou images analogiques pour faire leur mesure peut aussi être appliqué aux signaux (images) discrets. Pour définir la convolution des suites finies, on se restreint ici aux signaux de taille N périodisés ou des images carrées de taille $N \times N$ périodisées. On parle alors de convolution circulaire. Soit un filtre $(h_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ et un signal discret $(u_n)_{0 \leq n \leq N-1}$, alors la **convolution discrète** de h et u est définie par

$$(h \circledast u)_n = \sum_{p=0}^{N-1} h_{n-p} u_p.$$

Concernant des images, soient $(h_{m,n})_{0 \leq m,n \leq N-1}$ et $(v_{m,n})_{0 \leq m,n \leq N-1}$ deux suites finies périodisées de période N . Ainsi,

$$h_{m+kN, n+\ell N} = h_{m,n}, \quad \forall (m,n) \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \forall (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2.$$

On note leur produit de convolution

$$(h \circledast v)_{m,n} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} h_{m-p, n-q} v_{p,q}.$$



Si h et v sont des images numériques, on n'est pas assuré que $h \circledast v$ le soit car $h \circledast v$ va a priori prendre des valeurs en dehors de Col. Il faut faire une étape supplémentaire (voir ultérieurement) pour que $h \circledast v$ soit une image numérique.

Comme pour les images analogiques, la convolution revient à faire des moyennes de v autour de (m, n) .



Le fait de prendre des images périodisées nous évite d'avoir des problèmes avec leur bord.

■ **Exemple 1.4** Nous présentons ci-dessous trois méthodes pour calculer une convolution circulaire discrète. Nous considérons ainsi deux signaux périodiques h et u et souhaitons calculer

$$v_n = (h \circledast u)_n = \sum_{p=0}^{N-1} h_{n-p} u_p. \quad (1.1)$$

Prenons par exemple

$$h = [1, 2, 2]; \quad u = [2, -1, 3].$$

- *Méthode lente.* Il faut calculer les trois composantes de v par la formule (1.1). Commençons par $n = 0$. Ainsi,

$$v_0 = h_0u_0 + h_{-1}u_1 + h_{-2}u_2$$

Afin de réaliser ces calculs, nous représentons dans le tableau ci-dessous les différentes valeurs nécessaires en se rappelant que les signaux sont périodiques.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
h	1	2	2	1	2	2	1
u	2	-1	3	2	-1	3	2

Ainsi, $v_0 = 6$. De même,

$$v_1 = h_1u_0 + h_0u_1 + h_{-1}u_2 = 9$$

$$v_2 = h_2u_0 + h_1u_1 + h_0u_2 = 5$$

et

$$v = [6, 9, 5].$$

- *Méthode rapide.* Cette méthode est spécifique à la convolution circulaire.

h	1	2	2	
u	2	-1	3	
h multiplié par u_0	2	4	4	
h multiplié par u_1 , shift de 1		-1	-2	-2
h multiplié par u_2 , shift de 2			3	6
somme des colonnes	2	3	5	4

On scinde en deux le vecteur résultant et on ajoute un zéro au dernier vecteur. On fait enfin la somme de ces deux vecteurs pour récupérer v

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 5 \\ + \quad 4 \quad 6 \quad 0 \\ \hline 6 \quad 9 \quad 5 \end{array}$$

Cette procédure n'est évidemment pas limitée aux vecteurs à trois composantes. Si $h = [1, 2, 3, 1]$ et $u = [1, 0, 1, 1]$, on a $h = [6, 6, 5, 4]$.

- La dernière méthode, rapide également, repose sur une multiplication d'une matrice H par le vecteur u . La matrice H est constituée sur ses colonnes par la version périodisée de h

$$h = 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ \dots$$

On isole les colonnes comme ci-dessous

$$\begin{array}{r} h = 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ \dots \\ h = 1 \ 2 \ 2 \\ \quad \quad \quad 2 \ 1 \ 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2 \ 2 \ 1 \end{array}$$

La matrice H est ainsi

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on a $v = Hu$.

■

1.4.2 Le fenêtrage

Lors de la prise de vue d'une image, même si la scène apparaît infinie vue en dehors de l'appareil photo, on est obligé de faire une opération de cadrage pour regarder la scène observable : il y a fenêtrage.

Ainsi, toutes les opérations de convolutions vues sur \mathbb{R}^d (\mathbb{R}^2 pour une image) sont à interpréter sur un domaine borné. Donc, après convolution, on a une image analogique $h * v$ dont on ne garde que la partie intérieure à une fenêtre $[0, N - 1]^2$. Mathématiquement, on multiplie par la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[0, N - 1]^2}$.



Cette perte d'informations joue un rôle important près des bords de l'image. En effet, lors de la convolution, si (x_1, x_2) est tel qu'il existe (x'_1, x'_2) hors de $[0, N - 1]^2$ tel que $h(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) \neq 0$, alors $h * v(x_1, x_2)$ dépend de v en un endroit où on ne la connaît pas. Plus le support de h est grand, plus ce nombre de points où l'information manque est grand. Comme pour les suites finies, on évite de problème en prolongeant $(h * v)\mathbb{1}_{[0, N - 1]^2}$ par périodisation

$$h * v(x_1, x_2) = h * v(x_1 + tN, x_2 + sN)$$

avec (t, s) tels que $(x_1 + tN, x_2 + sN) \in [0, N - 1]^2$.

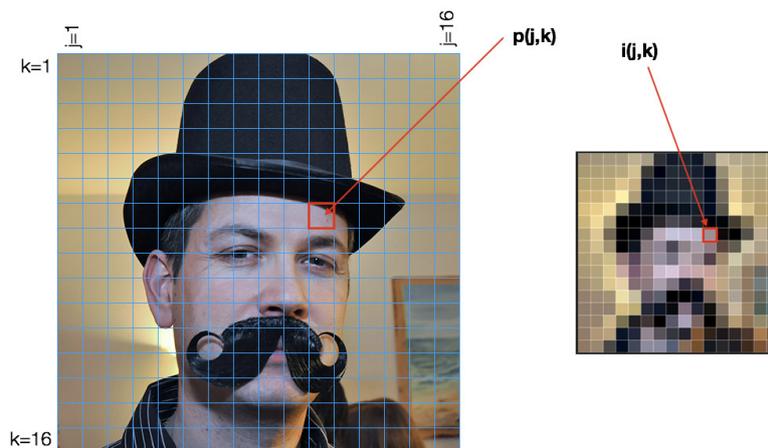
Ce n'est pas la seule solution pour régler les problèmes de bord, mais c'est celle qui nous permet dans ce cours d'utiliser aisément des outils puissants comme la transformée de Fourier que nous verrons ultérieurement.

1.4.3 L'échantillonnage

L'échantillonnage consiste, comme on l'a vu dans les exemples, à ne garder que les valeurs de $(h * v)\mathbb{1}_{[0, N - 1]^2}$ aux points entiers. On obtient donc une fonction (suite) définie sur $\{0, \dots, N - 1\}^2$ par

$$(h * v)\mathbb{1}_{[0, N - 1]^2}(m, n), \quad (m, n) \in \{0, \dots, N - 1\}^2.$$

Cette opération inhérente au processus de création d'une image numérique est celle où l'on perd le plus d'informations.



Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On peut souhaiter sous échantillonner une image (par exemple passer d'une image 512×512 à 256×256 ou 128×128). On suppose pour cela que l'on dispose d'une image digitale u définie sur $\{0, \dots, K(N - 1)\}^2$. On obtient l'image v définie sur $\{0, \dots, N - 1\}^2$ en faisant l'opération

$$v_{m,n} = u_{Km,Kn}.$$



L'échantillonnage et le sous échantillonnage peuvent faire apparaître des fréquences parasites dans le signal (image).



sous échantillonnage de rapport 4
apparition de fréquences parasites
effet de moirage

1.4.4 Le bruit

Un appareil de mesure créant un signal ou une image digitale génère toujours un bruit :

- caractère probabiliste du nombre de photons issus d'une région d'intensité donnée,
- imperfection des capteurs.

On modélise ces phénomènes par un bruit additif qui est une suite dont les valeurs sont aléatoires. On considère en particulier un bruit blanc : les valeurs $b_{m,n}$ sont indépendants les unes des autres, ce qui est souvent faux. De plus, on suppose ce bruit Gaussien c'est à dire que $b_{m,n}$ est une réalisation de la loi de probabilité continue de densité

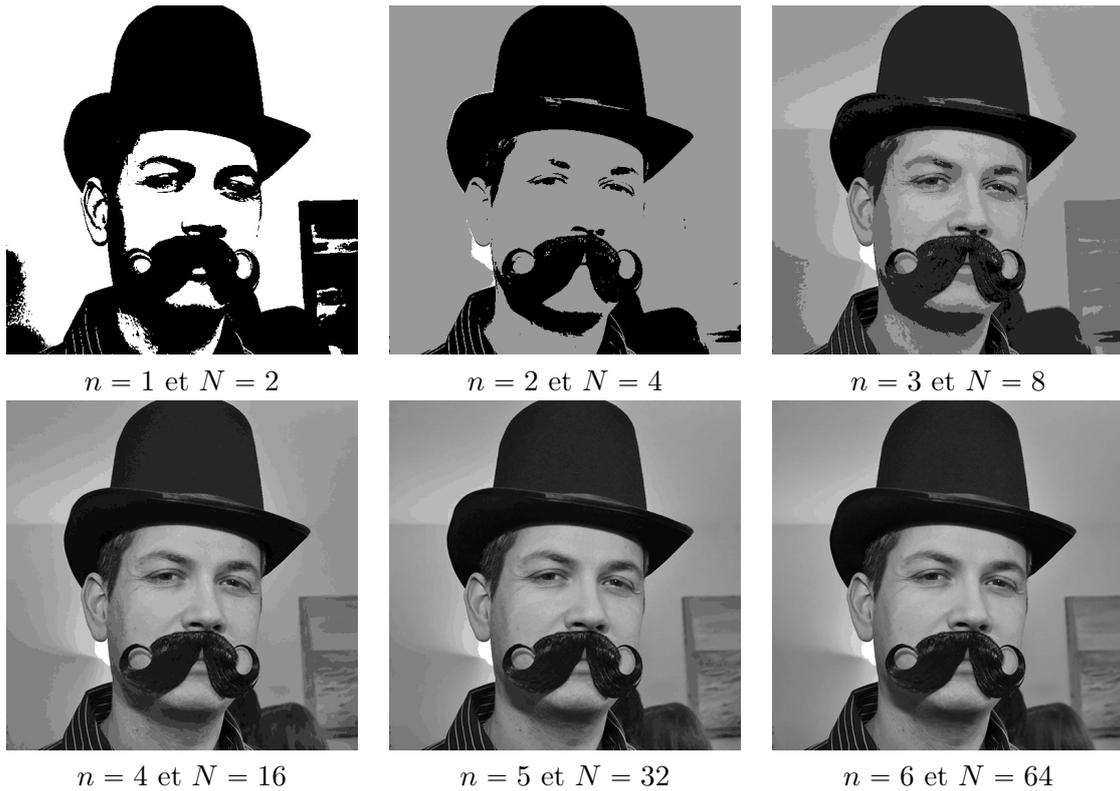
$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0.$$

Alors, l'image est représentée par la fonction

$$h * v(m, n) \mathbb{1}_{[0, N-1]^2}(m, n) + b_{m,n}.$$

1.4.5 La quantification

Comme on l'a vu, la quantification consiste à traduire les valeurs de $h * v(m, n) \mathbb{1}_{[0, N-1]^2}(m, n) + b_{m,n}$ sous la forme d'une couleur. Il faut approximer cette valeur qui est dans \mathbb{R}^3 (si on considère une image couleur RGB) ou \mathbb{R} (si on considère des niveaux de gris) de façon à ce qu'elle soit codable dans un ordinateur (nombre fini de bits). Si l'on code les niveaux de gris sur n bits, on a différentes quantification qui donne N niveaux de gris



Si l'image est en niveaux de gris codés sur 8 bits, les valeurs vont appartenir à l'ensemble $\{0, 1, \dots, 255\}$. On quantifie une valeur $t \in \mathbb{R}$ en l'approximant par la valeur $\text{Ar}(t)$ la plus proche dans $\{0, 1, \dots, 255\}$. Donc, l'image digitale est

$$u_{m,n} = \text{Ar} \left(\underbrace{h * v(m,n) \mathbb{1}_{[0, N-1]^2}(m,n)}_{w_{m,n}} + b_{m,n} \right).$$

Il peut arriver que les valeurs de $w_{m,n}$ soient trop éloignées de l'intervalle $\{0, 1, \dots, 255\}$ pour que les résultats soient corrects. Il faut donc procéder à des réglages :

- si l'image est trop claire (surexposition), alors la plupart des valeurs de $u_{m,n}$ seront proches ou égales à 255 : on obtient une image brûlée
- si l'image est trop sombre (sous exposition), alors $u_{m,n} \approx 0$.



image sur exposée



image sous exposée

1.5 Traitement ponctuel des images numériques

Le traitement ponctuel des images consiste à appliquer une fonctions qui agit sur les pixels

$$u_{m,n} \mapsto v_{m,n} = f(u_{m,n}).$$

Définition 1.5.1 — Histogramme d'une image. Soit $(u_{m,n})_{(m,n) \in [0, N-1]^2}$ une image numérique. On appelle histogramme de l'image $(u_{m,n})$ (en niveaux de gris) la fonction discrète

$$\forall p \in \{0, \dots, 255\}, \quad h_p = \text{nombre de pixels ayant } p \text{ pour niveaux de gris.}$$

L'histogramme donne donc la distribution des différentes teintes présentent dans l'image

Définition 1.5.2

- Moyenne $\mu = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{m,n}$ qui caractérise l'intensité (luminosité) de l'image.

- Variance $V = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (u_{m,n} - \mu)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{m,n}^2 - \mu^2$.

- Écart type $\sigma = \sqrt{V}$ caractérise le contraste de l'image.

Définition 1.5.3 On appelle histogramme normalisé l'histogramme qui donne la proportion de pixels en fonction du niveau de gris, c'est à dire

$$\bar{h}_p = \frac{h_p}{N^2}.$$

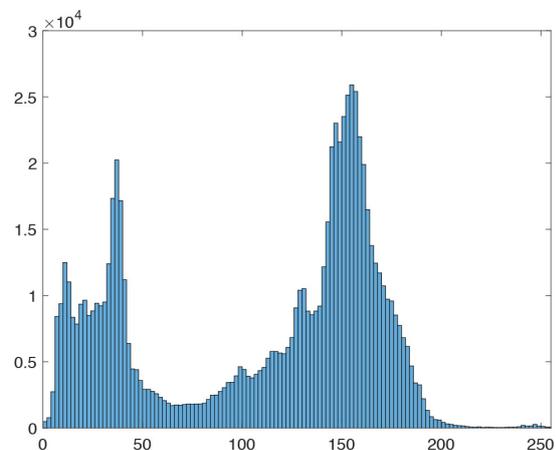
On appelle histogramme cumulé

$$h_C(p) = \sum_{k=0}^p \bar{h}_k.$$

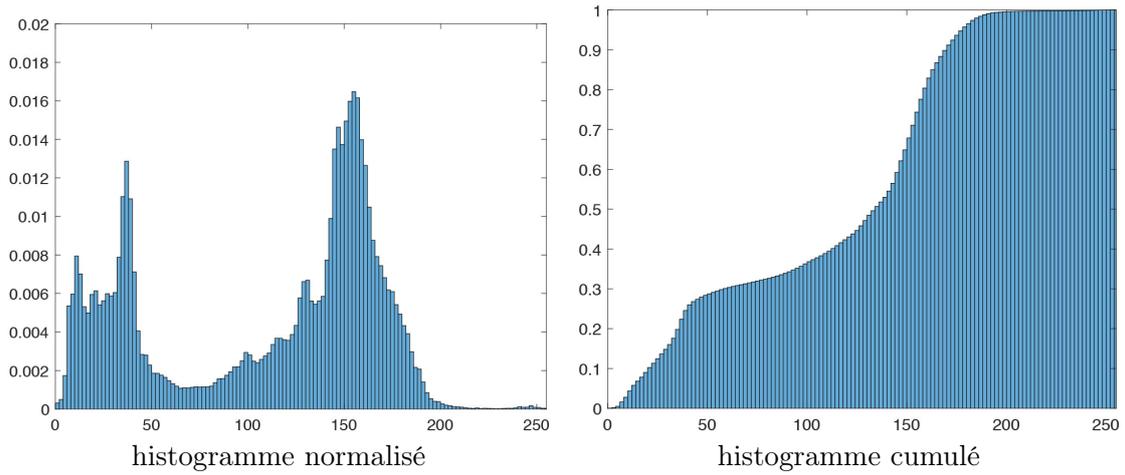
On appelle dynamique de l'image l'intervalle $[\min, \max]$ où \min désigne la valeur minimale des niveaux de gris et \max la valeur maximale.



photographie



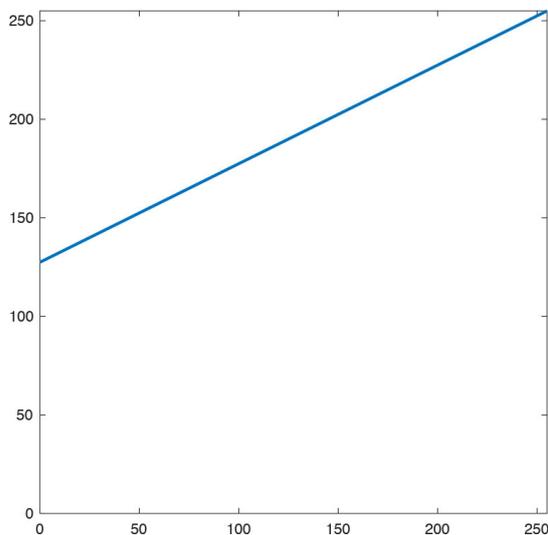
histogramme



Considérons l'image suivante dont nous souhaitons les valeurs par une fonction.



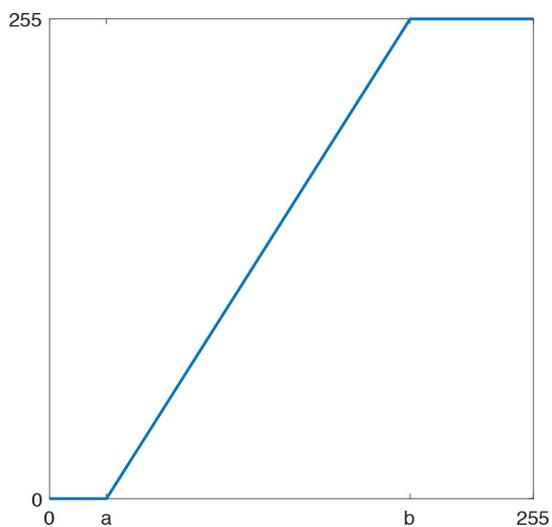
Par exemple, un éclaircissement peut être réalisé par la fonction $f(u) = (u + 255)/2$



L'augmentation du contraste est réalisé par la fonction

$$f(u) = \begin{cases} 255 \frac{u - a}{b - a} & \text{pour } a \leq u \leq b \\ 0 & \text{si } u < a \\ 255 & \text{si } u > b \end{cases}$$

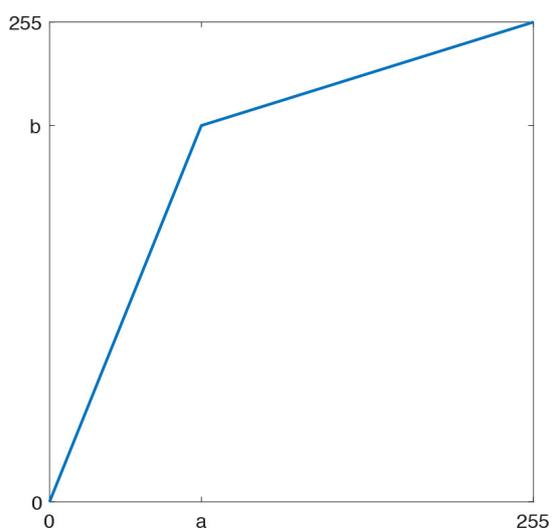
Si on prend $a = 30$ et $b = 190$, on a



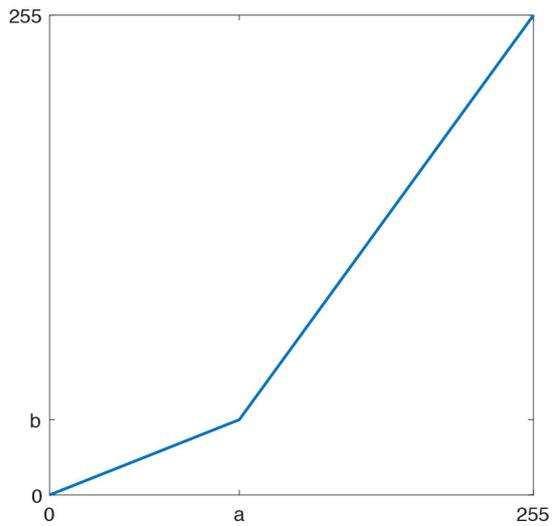
Pour rehausser le contraste, on utilise

$$f(u) = \begin{cases} \frac{b}{a}u & \text{pour } 0 \leq u \leq a \\ \frac{(255 - b)u + 255(b - a)}{255 - a} & \text{pour } a \leq u \leq 255 \end{cases}$$

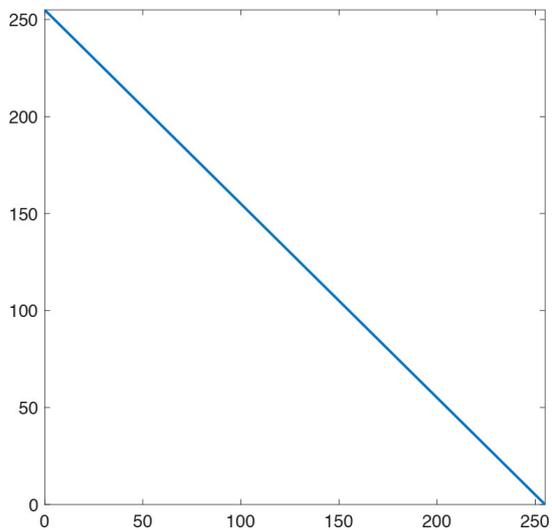
Pour les valeurs $a = 80$ et $b = 200$, on dilate la dynamique des zones claires



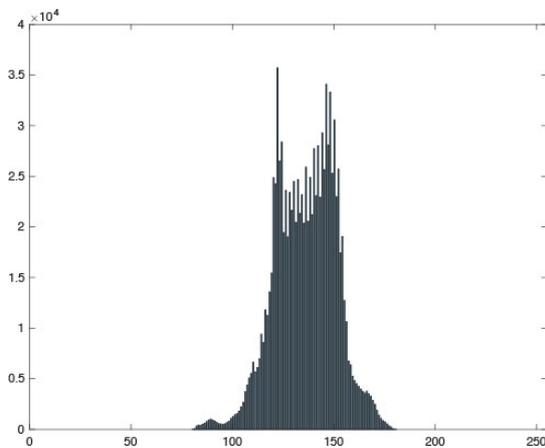
Pour les valeurs $a = 100$ et $b = 400$, on dilate la dynamique des zones sombres



La fonction négative est donnée par $f(u) = 255 - u$.

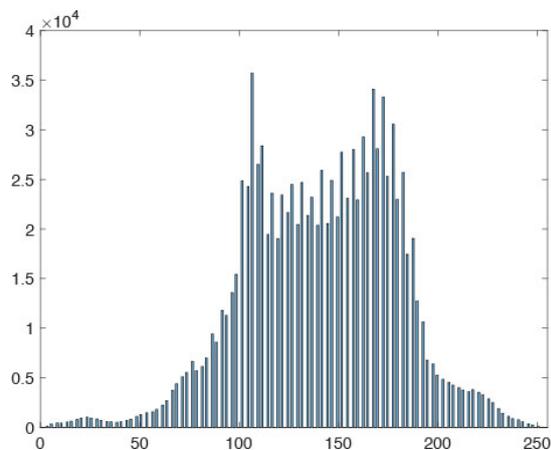


On peut également procéder par un étalement d'histogramme par la fonction $f(u) = au + b$. Supposons qu'on ait une image avec son histogramme



La dynamique de cette image est $[80, 180]$. On veut transférer la valeur 80 à 0 et 180 à

255 ce qui donne $a = 2,55$ et $b = -204$ ce qui donne



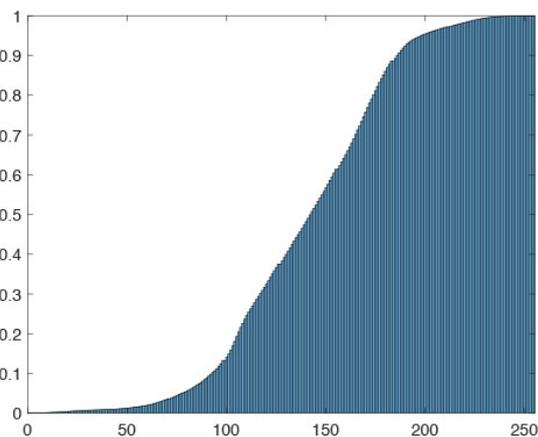
Le dernier exemple concerne l'égalisation par histogramme. Le principe consiste à appliquer une modification d'image par fonction afin que l'histogramme soit normalisé $h(k) = c, \forall k$, donnant un histogramme idéal plat. La méthode pour une image u à valeurs dans $\{0, \dots, 255\}$ avec un histogramme h , consiste pour chaque pixel $u_{m,n}$ à

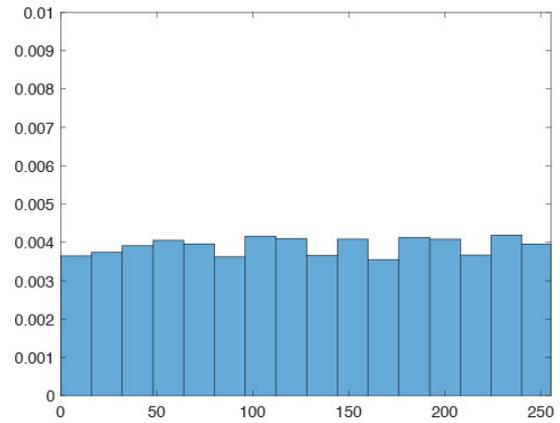
- Récupérer sa valeur $val = u_{m,n}$
- Déterminer la classe k contenant val
- Remplacer la valeur de $u_{m,n}$ par $h_C(k)$

Ceci conduit ainsi à la fonction

$$f(u_{m,n}) = \frac{255}{N^2} \sum_{i=0}^{u_{m,n}} h_i.$$

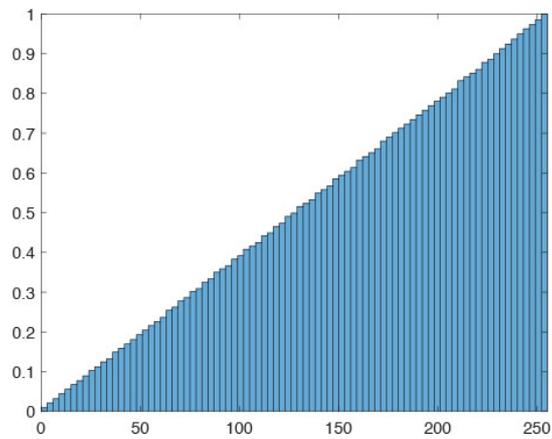
Par exemple,





histogramme à 16 classes.

et on a l'histogramme cumulé



2. La transformée de Fourier

Il est nécessaire de rappeler sans démonstration quelques résultats mathématiques importants pour définir proprement la transformée de Fourier et plus tard les ondelettes.

2.1 Compléments mathématiques

2.1.1 Fonctions et intégrations

Les signaux analogiques sont modélisés par des fonctions mesurables. Une fonction f est dite intégrable si $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty$. On fait référence ici à l'intégration de Lebesgue. On note $L^1(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables. Deux fonctions f_1 et f_2 sont égales si

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0.$$

Ainsi, f_1 et f_2 peuvent différer sur un ensemble de points de mesure nulle. On dit qu'elles sont égales presque partout ce que l'on note *p.p*

Théorème 2.1.1 — Convergence dominée. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ *p.p.* Si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leq g(t) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt < +\infty$$

alors f est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt.$$

Théorème 2.1.2 — Fubini. Si $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dx dy < \infty$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy \right) dx.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un paramètre et $f_{\lambda}(t) = f(t, \lambda)$ intégrable par rapport à t . Soit $F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f_{\lambda}(t) dt$ une intégrale dépendant d'un paramètre.

Théorème 2.1.3 — Continuité sous le signal intégrale. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et

- i) $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda \mapsto f(t, \lambda)$ soit continue en λ_0
 - ii) il existe un voisinage de λ_0 et $g \in L^1(\mathbb{R})$ tels que $|f(t, \lambda)| \leq g(t) \forall \lambda, p.p. x$.
- Alors $F(\lambda)$ est continue en λ_0 .

Ce résultat s'étend pour la dérivabilité de F par rapport à λ sous des hypothèses similaires de dérivabilité (i) et de majorations (ii) de la dérivée par une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.

2.1.2 Espaces de Banach et de Hilbert

Espaces de Banach

Les signaux sont souvent considérés comme des vecteurs. Pour définir une distance, on travaille dans un espace vectoriel H qui admet une norme, application qui vérifie

- $\forall f \in H, \|f\| \geq 0$ et $\|f\| = 0 \iff f = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.
- $\forall f, g \in H, \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

La convergence d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f dans H signifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Pour garantir qu'on reste dans H en passant à de telles limites, on impose une propriété de complétude en utilisant la notion de suites de Cauchy : (f_n) est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0$, si n et p sont assez grands, alors $\|f_n - f_p\| < \varepsilon$. L'espace est dit complet si toute suite de Cauchy dans H converge vers un élément de H . Dans ce cas, H est un espace de Banach.

■ **Exemple 2.1** • Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on définit sur les suites $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la norme

$$\|f_n\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^p \right)^{1/p}.$$

L'espace $\ell^p = \{(f_n) : \|f_n\|_p < \infty\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.

- L'espace $L^p(\mathbb{R})$ constitué des fonctions mesurables f sur \mathbb{R} telle que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

est un espace de Banach muni de cette norme. ■

Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application linéaire $U : X \rightarrow Y$ est appelée opérateur, et U est bornée ou continue si il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|Ux\|_Y \leq K \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

La norme de l'opérateur U , notée $\|U\|$, est la plus petite constante K . Alternativement, on a aussi

$$\|U\| = \sup_{x \in X} \frac{\|Ux\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|Ux\|_Y.$$

Un opérateur $U : X \rightarrow Y$ est inversible si U est surjectif et injectif (il est donc bijectif).

Espaces de Hilbert

Autant que possible, on travaille dans un espace ayant un produit scalaire (pour définir les angles et l'orthogonalité). Un espace de Hilbert H est un espace de Banach muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

- linéarité $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$.
- symétrie hermitienne $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.
- $\langle f, f \rangle \geq 0$ et $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$.

$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ est une norme et on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz (C.S)

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Deux éléments $f, g \in H$ sont orthogonaux si $\langle f, g \rangle = 0$ et le complément orthogonal d'un sous espace U de H est

$$U^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in U\}.$$

■ **Exemple 2.2** • signaux discrets f_n et g_n :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \overline{g_n} \quad \text{et} \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2.$$

$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{f_n : \|f_n\| < +\infty\}$ est un espace de Hilbert et on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \overline{g_n} \leq \|f_n\| \|g_n\|$.

- signaux analogiques $f(t)$ et $g(t)$: $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert (des fonctions d'énergie finie).

■

Soit U un opérateur borné d'un espace de Hilbert $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ dans un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$. L'opérateur adjoint est défini comme l'unique opérateur $U^* : H \rightarrow K$ tel que

$$\langle x, Uy \rangle_H = \langle U^* x, y \rangle_K, \quad \forall x \in H, y \in K.$$

Quand $K = H$, un opérateur borné $U : H \rightarrow H$ est unitaire si $UU^* = U^*U = I$. Si U est unitaire, alors

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Un opérateur borné $U : H \rightarrow H$ est auto-adjoint si $U = U^*$. Quand U est auto-adjoint,

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ux, x \rangle|$$

et le produit scalaire $\langle Ux, x \rangle$ est réel.

Une classe importante pour nous d'opérateurs auto-adjoints consiste en les projections orthogonales. Considérons un sous-espace fermé V de H . Un projecteur P_V sur V est un opérateur linéaire ($U(\lambda x + \mu y) = \lambda Ux + \mu Uy$) qui vérifie

$$\forall f \in H, \quad P_V f \in V \quad \text{et} \quad \forall f \in V, \quad P_V f = f.$$

Un projecteur est orthogonal si

$$\forall f \in H, \quad \forall g \in V, \quad \langle f - P_V f, g \rangle = 0.$$

Proposition 2.1.4 Si P_V est un projecteur sur V , alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- P_V est orthogonal.
- P_V est autoadjoint.
- $\|P_V\| = 1$.
- $\forall f \in H, \|f - P_V f\| = \min_{g \in V} \|f - g\|$.

Si $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de V (voir suite pour la définition), l'opérateur P_V est donné explicitement par

$$P_V x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k, \quad \forall x \in H.$$

Si $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de Riesz de V et $\{\tilde{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la base biorthogonale (voir suite pour la définition), alors

$$P_V x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, \tilde{e}_k \rangle e_k, \quad \forall x \in H.$$

2.1.3 Base des espaces de Hilbert

On rappelle qu'en dimension finie, une base d'un espace vectoriel est une famille de vecteurs qui est libre et génératrice.

Définition 2.1.1

- Une collection finie d'éléments $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ dans un espace vectoriel V est linéairement indépendante si toute collection de scalaires $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ est identiquement nulle. Sinon, $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est linéairement dépendante.
- V est de dimension n si il existe n éléments linéairement indépendants dans V mais que tout ensemble de $(n + 1)$ éléments est linéairement dépendant. Si il y a un ensemble de n éléments indépendants pour tout n , alors V est infini dimensionnel.
- Un ensemble de n éléments linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension n est une base pour cet espace.

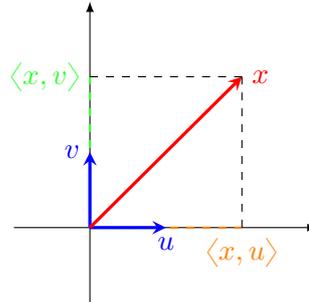


1. Si $\{v_k\}_{1 \leq k \leq n}$ est une base de V , de dimension n , alors tout $x \in V$ s'écrit de manière unique comme $x = \sum_k \alpha_k v_k$ et donc V est isomorphe à \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) et on peut équiper V d'un produit scalaire et parler d'orthogonalité. On peut définir une base orthonormée pour tout espace vectoriel de dimension finie par l'algorithme de Gram-Schmidt.
2. Soient deux bases de V (v_k) et (w_k) . Alors, il existe une unique matrice T de taille $n \times n$ telle que si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont les coefficients de $x \in V$ dans la base (v_k) , alors le vecteur $T\alpha$ rassemble les coefficients de x dans la base (w_k) : T est une matrice de changement de base. Toute base est donc l'image par une application linéaire inversible d'une base orthonormée.

Avant de voir comment ces propriétés s'étendent à la dimension infinie, présentons quelques exemples de la dimension finie.

■ **Exemple 2.3** On se place dans le plan \mathbb{R}^2 .

1. Considérons deux vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$. Alors, le vecteur $x = (2, 2)$ se représente aisément par une décomposition dans la base (u, v)



La base (u, v) est orthonormée et on a donc simultanément

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad x = \langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \exists!(\alpha_1, \alpha_2), \quad x = \alpha_1 u + \alpha_2 v.$$

2. Si maintenant $u = (2, 0)$, $v = (0, 2)$ et $x = (1, 1)$. La base (u, v) n'est plus orthonormée mais simplement orthogonale. Alors $\langle x, u \rangle = 2$ et $\langle x, v \rangle = 2$ et

$$\langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x.$$

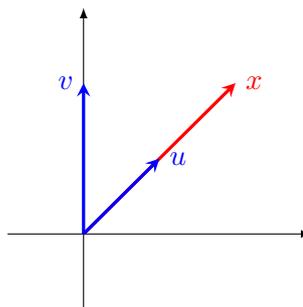
En revanche, on a toujours

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \exists!(\alpha_1, \alpha_2), \quad x = \alpha_1 u + \alpha_2 v.$$

En effet,

$$\alpha_1 = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2}.$$

3. Prenons maintenant $u = (1, 1)$, $v = (0, 2)$ et $x = (2, 2)$. La base est maintenant une base oblique.

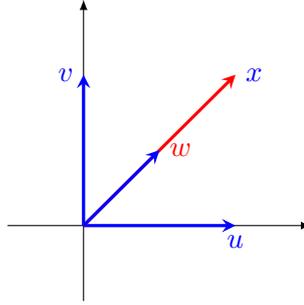


Encore une fois, on n'a pas $\forall x \in \mathbb{R}^2, x = \langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v$. Par contre, la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \exists!(\alpha_1, \alpha_2), \quad x = \alpha_1 u + \alpha_2 v$$

reste vraie. En revanche, l'identification des (α_1, α_2) est non triviale ($\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 0$ ici).

4. Considérons maintenant une famille $\{u, v, w\}$ de vecteurs de \mathbb{R}^2 . Elle est redondante et présente aussi une structure oblique. On prend $u = (2, 0)$, $v = (0, 2)$, $w = (1, 1)$ et $x = (2, 2)$



On n'a évidemment pas

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad x = \langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v + \langle x, w \rangle w.$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad x = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w,$$

mais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ n'est plus unique! En effet, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 0)$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 2)$ permettent de vérifier l'égalité. ■

C'est ce genre d'exemples qui conduit en dimension infinie à construire les notions de frames (base oblique redondante), de bases de Riesz (base oblique) et de bases orthonormées.

Base orthonormée d'un espace de Hilbert

Une famille $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dénombrable dans un espace de Hilbert H est orthogonale si pour tout $n \neq p$, $\langle e_n, e_p \rangle = 0$. Si pour tout $f \in H$, il existe une suite (λ_n) telle que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^N \lambda_n e_n \right\| = 0$$

alors $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de H . L'orthogonalité implique

$$\lambda_n = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}$$

et on écrit

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n.$$

Ceci nous donne la représentation de f dans la base orthogonale $\{e_n\}$. Un espace de Hilbert qui admet une base orthogonale est dit séparable. La base est orthonormée si $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, si on prend deux vecteurs f et g de H , on a la relation de Parseval

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n, \sum_{p=0}^{\infty} \langle g, e_p \rangle e_p \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle}. \end{aligned}$$

Si $f = g$, on obtient la relation de conservation d'énergie appelée formule de Plancherel

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2.$$

■ **Exemple 2.4** Les espaces de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ et $L^2(\mathbb{R})$ sont séparables.

- La famille des Dirac translats (voir la définition ultérieurement) $\{e_n = \delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $\ell^2(\mathbb{Z})$.
- Base de Haar de $L^2(\mathbb{R})$. Soit

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, les dilatations-translations de ψ engendrent une base de $L^2(\mathbb{R})$ dite d'ondelettes

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j(t - 2^{-j}n)) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

et pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}.$$

- La famille $\left\{ \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ est une base de Hilbert de $L^2(-\pi, \pi)$ dite base de Fourier et si $f \in L^2(-\pi, \pi)$

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ins} f(s) ds \right) e^{int}.$$

■

On peut caractériser toutes les bases orthonormées de H en partant d'une base orthonormée arbitraire.

Théorème 2.1.5 Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H . Alors les bases orthonormées de H sont définies par les ensembles $\{Ue_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ où $U : H \rightarrow H$ est un opérateur unitaire.

En pratique, les bases orthonormées sont certainement les bases les plus utiles. Cependant, les conditions pour avoir une base orthonormée sont très fortes et souvent, il est impossible de construire des bases orthonormées possédant des conditions supplémentaires.

Bases de Riesz

On vient de caractériser les bases orthonormées en terme d'action d'opérateurs unitaires. On peut assouplir la condition d'unitarité et fabriquer des bases « plus faibles » dites bases de Riesz (« bases obliques »).

Définition 2.1.2 Une base de Riesz pour H est une famille de la forme $\{Ue_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ où $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H et $U : H \rightarrow H$ est un opérateur bijectif borné.

Il faut voir cette définition comme le pendant de la remarque 2 donnée après la définition 2.1.1.

Comme on l'a vu dans l'exemple précédent (point 3), on peut tout de même reconstruire un vecteur sur une base oblique. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.1.6 Si $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de Riesz pour H , $f_k = Ue_k$, alors il existe une suite unique $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de H telle que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k, \quad \forall f \in H. \quad (2.1)$$

La suite $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une base de Riesz définie par $g_k = (U^{-1})^* e_k$ dite base de Riesz

duale de $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

À une base de Riesz correspond toujours une base duale. On parle donc souvent de paire de bases de Riesz duales. Ces bases vérifient une relation particulière concernant leur orthogonalité relative.

Définition 2.1.3 Deux suites $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans un espace de Hilbert sont biorthogonales si

$$\langle f_k, g_j \rangle = \delta_{k,j}.$$

Corollaire 2.1.7 Soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une paire de bases de Riesz duales dans H . Alors, on a

- i) $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sont biorthogonales
- ii) Pour tout $f \in H$,

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, g_k \rangle f_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, f_k \rangle g_k.$$

On a une propriété très importante de stabilité

Proposition 2.1.8 Si $\{f_k = Ue_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de Riesz pour H , alors il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in H.$$

La plus grande constante A est $1/\|U^{-1}\|^2$ et la plus petite constante B vaut $\|U\|^2$. Si $A = B$, alors

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = A\|f\|^2$$

ce qui conduit à la relation de Plancherel généralisée.

Le théorème suivant donne une condition équivalente pour que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ soit une base de Riesz.

Théorème 2.1.9 Une suite $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de Riesz de H si et seulement si $\overline{\text{Vect}\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}} = H$ et si il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que pour toute famille finie de scalaires $\{c_k\}$, on a

$$A \sum |c_k|^2 \leq \left\| \sum c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum |c_k|^2.$$

■ **Exemple 2.5** Nous présentons ci-dessous un exemple d'utilisation des bases biorthogonales. On reprend pour cela le cas 3 de l'exemple 2.3. On considère la base oblique $u = (1, 1)$, $v = (0, 2)$ et le vecteur $x = (2, 2)$. Recherchons la base duale $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ de $\{u, v\}$. Elle vérifie les quatre relations

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}, u \rangle &= 1, & \langle \tilde{v}, u \rangle &= 0, \\ \langle \tilde{u}, v \rangle &= 0, & \langle \tilde{v}, v \rangle &= 1. \end{aligned}$$

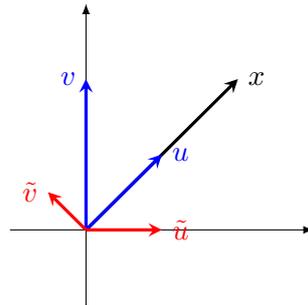
Si $\tilde{u} = (a, b)$, on a $a + b = 1$ et $2b = 0$ d'où $\tilde{u} = (1, 0)$. De même, on a $\tilde{v} = (-1/2, 1/2)$. La base $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ permet de calculer la décomposition de x dans la base $\{u, v\}$ par la relation (2.1). Soit $x = \alpha u + \beta v$. On a

$$\alpha = \langle x, \tilde{u} \rangle = 2 \quad \text{et} \quad \alpha = \langle x, \tilde{v} \rangle = 0$$

et on retrouve le résultat attendu. On a également

$$x = \langle x, u \rangle \tilde{u} + \langle x, v \rangle \tilde{v} = 4\tilde{u} + 4\tilde{v}.$$

En représentant ces différents vecteurs sur une figure, on se rend bien compte du caractère biorthogonal des deux bases.



■

Frames

Ce paragraphe peut être omis en première lecture.

La propriété principale d'une base $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert H est que tout vecteur $f \in H$ peut être représenté par une combinaison linéaire (infinie) d'éléments f_k dans la base

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k(f) f_k. \quad (2.2)$$

Les coefficients $c_k(f)$ sont uniques.

Une frame est une suite d'éléments $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans H qui permet que chaque vecteur $f \in H$ puisse être écrit comme dans (2.2). Cependant, les coefficients correspondants ne sont pas nécessairement uniques (voir exemple 2.3, point 4). Donc, une frame peut ne pas être une base.

Définition 2.1.4 Une famille dénombrable de vecteurs $\{f_k, k \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ est appelée une frame de H si il existe deux constantes $A, B \geq 0$ telles que pour tout $f \in H$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (2.3)$$

Si $A = B$, une frame est dite étroite et on a la relation de Plancherel généralisée

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle f, f_k \rangle|^2 = A\|f\|^2.$$

Les nombres A et B sont appelés bornes de frame. Ils ne sont pas uniques. En revanche, les bornes optimales sont disponibles en prenant le supremum sur tous les A et l'infimum sur tous les B .

On a d'après la définition que si $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une frame, alors

$$\overline{\text{Vect}\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}} = H.$$

R Il faut noter que la famille $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ étant potentiellement redondante, les f_k ne sont pas nécessairement indépendants. Avoir une frame (famille ayant de la redondance) est très utile en pratique en théorie du signal. Les réseaux de communication agissent en transportant des paquets de données. Chaque paquet contient l'information essentielle, c'est à dire les données que l'on veut transmettre, ainsi qu'une collection de paramètres de contrôle. Le but de ces paramètres supplémentaires est de vérifier que les données seront délivrées correctement : dans le cas où une erreur apparaît, aucun paquet n'est

délivré. Il est clair que si il n'y a aucune relation entre les différents paquets, les données appartenant au paquet perdu ne peuvent pas être récupérées. Cependant, si il y a un peu de redondance dans le système, c'est à dire des relations entre les paquets, il y a un peu d'espoir que au moins des parties des données manquantes puissent être récupérées.

Mathématiquement, on peut modéliser les paquets à transmettre comme des coefficients de frame. Donc, un paquet qui n'est pas délivré revient à enlever un élément de la frame. Si la frame était une base, elle ne serait plus une base après le retrait d'un élément ; cependant, si elle est redondante, il est possible qu'elle reste une frame après suppression d'un élément. En fait, une frame peut rester une frame après suppression de plusieurs éléments.

Une frame sur un espace de Hilbert est donc une généralisation à la dimension infinie de la notion de famille de vecteurs avec redondance possible sur un espace vectoriel V avec laquelle on peut engendrer des vecteurs de V , l'inégalité (2.3) assurant une stabilité.

■ **Exemple 2.6** Soit $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H .

En répétant chaque éléments de $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ deux fois, on obtient

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, \dots\},$$

qui est une frame étroite de borne de frame $A = 2$. Si on ne répète que e_1 , on obtient

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\},$$

qui est une frame de bornes $A = 1$, $B = 2$. ■

Considérons un espace de Hilbert H équipé d'une frame $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Alors, l'opérateur défini par

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H, \quad T\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k f_k$$

est borné et s'appelle opérateur de synthèse. Son adjoint T^* donné par

$$T^* : H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$$

est appelé opérateur d'analyse. En composant T et T^* , on obtient l'opérateur de frame

$$S : H \rightarrow H, \quad S f = T T^* f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, f_k \rangle f_k.$$

On peut montrer que S est borné, auto-adjoint et inversible. Naturellement, $\{S^{-1} f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une frame de borne de frame A^{-1} et B^{-1} . Cette frame est appelée frame duale canonique de $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Comme pour les bases de Riesz, on a le théorème suivant qui donne la décomposition d'un vecteur dans une frame

Théorème 2.1.10 Soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une frame, d'opérateur de frame S . Alors

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in H$$

et

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k, \quad \forall f \in H.$$

Les nombres $\langle f, S^{-1} f_k \rangle$ s'appellent coefficients de frame.

La difficulté dans ce résultat en pratique est qu'il est nécessaire de trouver l'opérateur S^{-1} pour décomposer un vecteur $f \in H$. Un des moyens de contourner le problème est de considérer des frames étroites

Corollaire 2.1.11 Soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une frame étroite de borne de frame A . Alors, la frame duale canonique est $\{A^{-1}f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et

$$f = \frac{1}{A} \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, f_k \rangle f_k, \quad f_k \in H.$$

Il y a un lien entre base de Riesz et frame.

Théorème 2.1.12 Une base de Riesz $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de H est une frame pour H et les bornes de la base de Riesz coïncident avec les bornes de frame. La base duale de Riesz est égale à la base duale canonique de frame $\{S^{-1}f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Une frame qui n'est pas une base de Riesz est dite redondante. En fait, si $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une frame qui n'est pas une base de Riesz, il existe des coefficients $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$ pour lesquels

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k f_k = 0.$$

Ainsi, pour de telles frames, il y a une certaine interdépendance entre les éléments de ces frames.

Théorème 2.1.13 Soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une frame de H . Alors, les deux affirmations sont équivalentes

- i) $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de Riesz de H .
- ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ pour $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors $c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

On note donc que si $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une frame redondante, alors un élément $f \in H$ a plusieurs représentations en terme d'éléments f_k de la frame. En fait, pour toute suite $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$ telle que $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k f_k = 0$, alors

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, S^{-1}f_k + c_k \rangle) f_k.$$

On se rappelle que les bases de Riesz de H sont caractérisées comme les familles $\{Ue_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ où $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H et $U : H \rightarrow H$ est borné et inversible. On a une caractérisation équivalente pour les frames.

Théorème 2.1.14 Soit $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H . Les frames de H sont les familles $\{Ue_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ où $U : H \rightarrow H$ est un opérateur borné et surjectif.

2.1.4 Dirac

Les Dirac permettent de faire la transition entre les signaux analogiques et les signaux discrets. Les manipulations symboliques avec des Dirac simplifient les calculs, sans qu'on ait à se soucier de problèmes de convergence. Cela se justifie par la théorie des distributions.

Un Dirac a son support réduit à $t = 0$ et associe à toute fonction continue ϕ sa valeurs en $t = 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0).$$

On peut obtenir un Dirac en comprimant une fonction $g \in L^1$ telle que $\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = 1$: $g_s(t) = g(t/s)/s, s < 1, \forall g \in C^0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g_s(t) \phi(t) dt = \phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0).$$

On définit donc un Dirac par la limite (faible) ci-dessus. Un Dirac n'est pas une fonction car son support est réduit à un point $t = 0$ (mesure nulle) mais sa masse est 1. Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\phi(t) dt$ n'est qu'une notation symbolique.

Il est intéressant de construire la translation des Dirac pour la construction des signaux discrets. On note $\delta_{\tau} = \delta(t - \tau)$ la masse concentrée en $t = \tau$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t - \tau)\phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \delta(\tau - t)\phi(t) dt = \phi(\tau) \quad (2.4)$$

ce qui veut dire que $\phi * \delta(u) = \phi(u)$. De même, $\phi * \delta_{\tau}(u) = \phi(u - \tau)$.

Attention, les quantités de l'équation (2.4) ne sont pas des intégrales et on ne peut donc pas appliquer de changement de variables. Il faut comprendre que $\delta(t - \tau)$ charge le point $t - u = 0 = u - t$ d'où l'égalité des deux notations.

2.2 La transformée de Fourier

Afin d'éviter des problèmes de convergence, l'intégrale de Fourier est d'abord définie sur $L^1(\mathbb{R})$ puis étendue à $L^2(\mathbb{R})$.

2.2.1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Définition 2.2.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors sa transformée de Fourier est définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} dt = \langle f(t), e^{it\xi} \rangle.$$

Le terme $f(t)e^{-it\xi}$ peut être vu comme la modulation de la fonction f par la fonction de modulation $e^{-it\xi}$. Le terme $\hat{f}(\xi)$ est le coefficient de Fourier à la fréquence ξ . Si f possède des oscillations proches de la fréquence ξ , elles vont entrer en résonance avec la fréquence ξ de $e^{-it\xi}$ et donc $\hat{f}(\xi)$ aura des valeurs différentes de 0. Si au contraire, f ne possède pas d'oscillations à la fréquence ξ , alors $\hat{f}(\xi) \approx 0$. Ainsi, $\hat{f}(\xi)$ mesure l'occurrence d'oscillations à la fréquence ξ dans f .

R La transformée de Fourier est une opération globale : si on modifie localement f en un temps t_* , alors tous les coefficients de Fourier sont immédiatement impactés.

Théorème 2.2.1 — Riemann-Lebesgue. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a

- i) \hat{f} est continue et bornée sur \mathbb{R} avec $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$,
- ii) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Preuve du point i)

- On a $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty$ car $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- Pour tout t , la fonction $h : \xi \mapsto f(t)e^{-i\xi t}$ est continue et $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} h(t, \xi) dt$. On a $|h(t, \xi)| = |f(t)|$ qui est un majorant indépendant de ξ et qui est dans $L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse. On applique la théorème de continuité des intégrales à paramètres pour conclure à la continuité.

Le point ii) est trop long pour être traité ici. ■

■ **Exemple 2.7** On considère la fonction indicatrice $v = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a,a]}$, $a > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\hat{v}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a,a]} e^{-it\xi} dt, \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-it\xi} dt = -\frac{1}{2i\xi a} \left[e^{-it\xi} \right]_{-a}^a = -\frac{1}{2i\xi a} (e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}) \\ &= \frac{\sin a\xi}{a\xi} = \text{sinc}(a\xi)\end{aligned}$$

où la fonction sinus cardinal est définie par

$$\text{sinc} = \begin{cases} \sin(t)/t & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Le sinus cardinal est donc la transformée de Fourier de la fonction de fenêtrage. On constate que même si la fonction v est discontinue, sa transformée de Fonction \hat{v} est elle continue. En outre, on constate que \hat{v} décroît comme $1/a\xi$ quand $|\xi| \rightarrow \infty$, ce qui est une décroissance assez lente. Ainsi, quand un signal contient une discontinuité, ses coefficients de Fourier décroissent lentement. ■

Propriétés 2.2.2 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$

i) Translation et modulation par $e_a(t) = e^{iat}$

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = e_{-a}(\xi) \hat{f}(\xi), \quad \widehat{e_a f}(\xi) = \tau_a \hat{f}(\xi)$$

où $\tau_a h(t) = h(t - a)$.

ii) Dérivation. Si $x^k f \in L^1$, $k = 0, \dots, n$, alors $\hat{f} \in C^n$ et on a les n dérivées fréquentielles d'ordre k données par

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \widehat{(-it)^k f}(\xi), \quad k = 0, \dots, n.$$

Si $f \in C^n(\mathbb{R})$ avec $f^{(k)} \in L^1$, $k = 0, \dots, n$, alors on a les n dérivées spatiales d'ordre k données par

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

iii) Si $f \in L^1$ est à support compact, alors $\hat{f} \in C^\infty$.

iv) Changement d'échelle : si $g(t) = f(t/s)$ alors $\hat{g}(\xi) = |s| \hat{f}(s\xi)$.

Idées de preuves

i) Par changement de variable $x = t - a$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(t - a) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+a)\xi} f(x) dx = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi).$$

ii) Par intégration par parties, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f'(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-it\xi} \right)' f(t) dt = i\xi \hat{f}(\xi).$$

La propriété qui rend la transformée de Fourier utile est qu'elle est inversible. Ainsi, si on connaît les coefficients de Fourier \hat{f} , on peut reconstruire f . Il faut cependant un peu moduler ce résultat car la justification de l'existence de la transformée de Fourier inverse peut être délicate. ■

Théorème 2.2.3 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi.$$

On a donc la formule de reconstruction

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\xi), e^{-it\xi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), e^{it\xi} \rangle e^{it\xi} d\xi.$$

La formule d'inversion décompose f comme une somme d'ondes sinusoïdales $e^{i\xi t}$ d'amplitudes $\hat{f}(\xi)$.

- R** La formule de reconstruction est une caractéristique des bases orthogonales. La base orthonormée associée est $\{e^{i2\pi\xi t}\}$ ce qui éviterait d'avoir à ajouter la normalisation présente dans la transformée de Fourier inverse.

Comme pour la transformée de Fourier directe, comme on suppose $\hat{f} \in L^1$, f est continue. On ne sait donc pas justifier avec la théorie L^1 la transformée de Fourier inverse de transformée de Fourier des fonctions discontinues. On fera donc l'extension de la transformée de Fourier à L^2 pour résoudre ce problème.

Intérêts principaux de la transformée de Fourier

- Le calcul des dérivées est simplifié puisqu'il suffit de multiplier par $(i\xi)^k$ dans l'espace des fréquences.
- On peut modifier les fréquences et reconstruire une fonction.

L'autre intérêt fondamental est la possibilité de simplifier l'application d'un filtre, soit encore de manipuler plus aisément les convolutions.

Théorème 2.2.4 Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ et un filtre $h \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction $g = h * f \in L^1$ et

$$\hat{g}(\xi) = \hat{h}(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Réciproquement, on a

$$\mathcal{F}(f(t)h(t))(\xi) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{h}(\xi).$$

La transformée de Fourier du filtre h s'appelle fonction de transfert.

Preuve On a

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-u)h(u)du \right) dt.$$

Comme $|f(t-u)||h(u)|$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 , on peut appliquer le théorème de Fubini et on fait le changement de variable $(t, u) \mapsto (v = t - u, u)$

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(u+v)\xi} f(v)h(u)dudv \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi} h(u)du \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iv\xi} f(v)dv \right). \end{aligned}$$

■

Extension aux dimensions supérieures L'extension aux dimensions supérieures ne pose pas de réelles difficultés, seule la normalisation de la transformée de Fourier inverse est spécifique

à la dimension.

$$\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^D} e^{-i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} e^{i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Les propriétés énumérées précédemment restent valable en dimensions supérieures. Une propriété spécifique aux dimensions $D > 1$ concerne les fonctions séparables. Par exemple, si $D = 2$, et $f(x_1, x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2)$, alors $\hat{f}(\xi_1, \xi_2) = \hat{g}_1(\xi_1)\hat{g}_2(\xi_2)$. Un cas intéressant concerne $f(x_1, x_2) = e^{i(x_1+x_2)}$.

2.2.2 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

On a vu que la transformée de Fourier de $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ est $\hat{f}(\xi) = 2\text{sinc}(\xi)$. Or, $\hat{f} \notin L^1$. En effet, même si $\int_0^{+\infty} \text{sinc}(\xi) d\xi$ converge (la valeur de cette intégrale vaut $\pi/2$), elle n'est pas absolument convergente $\int_0^{+\infty} |\text{sinc}(\xi)| d\xi = +\infty$ et n'est donc pas intégrable au sens de Lebesgue. On ne peut donc pas appliquer la transformée de Fourier inverse. Cependant, $|\hat{f}|^2$ est intégrable (on a $\int_{\mathbb{R}} |\text{sinc}(\xi)|^2 d\xi = \pi$). On doit donc étendre la transformée de Fourier à L^2 . Le théorème suivant montre que le produit scalaire et la norme de L^2 sont invariants par transformée de Fourier, à un facteur 2π près. On reconnaîtra les formules de Parseval et de Plancherel.

Théorème 2.2.5 Soit $f, h \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, alors on a l'égalité de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\bar{h}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{h}(\xi)} d\xi$$

et pour $f = h$, on a l'égalité de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

la transformée de Fourier étant donc une (quasi) isométrie sur L^2 .

R En dimension D , on a

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)} = \frac{1}{(2\pi)^D} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)}$$

et

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^D} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^D)}^2.$$

L'extension de la transformée de Fourier à L^2 se fait par densité. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier n'est pas calculable car $f(t)e^{-i\xi t}$ n'appartient pas à L^1 . Elle est donc définie comme limite de la transformée de Fourier de fonctions appartenant à $L^1 \cap L^2$. Comme $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 , il existe une suite $\{f_n\}_n \in L^1 \cap L^2$ qui converge vers $f \in L^2$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0$. Comme $\{f_n\}_n$ converge, c'est une suite de Cauchy et donc $\|f_n - f_p\|$ peut être rendue arbitrairement petite pour n et p grands. De plus, $f_n \in L^1$ et donc \hat{f}_n est bien définie. Par Plancherel, on a

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_p\| = \sqrt{2\pi} \|f_n - f_p\| < \varepsilon$$

et donc \hat{f}_n est une suite de Cauchy. Or, un espace de Hilbert est un espace complet, les suites de Cauchy convergent vers un élément de cet espace. Donc, il existe $\hat{f} \in L^2$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}\| = 0$. Par définition, \hat{f} est la transformée de Fourier de f .

■ **Exemple 2.8 — Filtre passe bas idéal.** Nous avons vu que la transformée de Fourier facilite l'application d'un filtre en transformant une convolution en produit dans l'espace des fréquences. Supposons que l'on souhaite ne laisser passer que les basses fréquences d'un signal, il suffit pour cela de multiplier une fonction f par $\hat{h} = \mathbb{1}_{[-L,L]}$ dans l'espace des fréquences $\hat{f}(\xi)\hat{h}(\xi)$. L'opération dans l'espace du temps est $f * h$ et l'existence de h est justifiée par la théorie L^2 .

■

Transformée de Fourier d'un Dirac

Un Dirac n'appartient ni à L^1 , ni à L^2 . Il est nécessaire d'étendre la transformée de Fourier aux distributions tempérées (hors programme : voir programme de master). On suppose que cette théorie est valide pour justifier les calculs suivants. Comme $e^{-i\xi t} = 1$ en $t = 0$, on a

$$\hat{\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t)e^{-i\xi t} dt = 1.$$

Comme $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$, le translaté d'un Dirac a comme transformée de Fourier

$$\hat{\delta}_a(\xi) = e^{-ia\xi}.$$

Réciproquement, la transformée de Fourier inverse d'un Dirac est

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi)e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi},$$

de sorte que $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta(\xi)$.

On définit le peigne de Dirac comme étant la somme de Dirac translattés $c(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$ qui permet d'échantillonner uniformément les signaux analogiques car

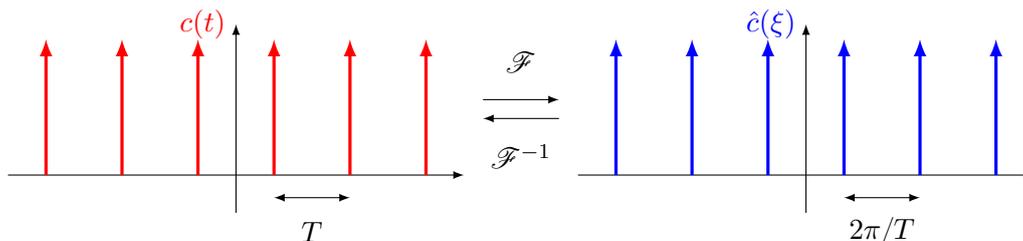
$$\int_{\mathbb{R}} c(t)\varphi(t)dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(nT).$$

On a $\hat{c}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inT\xi}$.

Théorème 2.2.6 — Formule de Poisson. On a (au sens des distributions)

$$\hat{c}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inT\xi} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\xi - \frac{2\pi k}{T}).$$

Cette formule (que nous reverrons) indique que \hat{c} est aussi un peigne de Dirac en fréquence d'espacement $2\pi/T$.



On peut dorénavant calculer la transformée de Fourier d'un sinus ou d'un cosinus. En effet, cela était impossible jusqu'alors car ni un sinus, ni un cosinus n'appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$. Ce

calcul est à faire au sens des distributions.

$$\begin{aligned}
 \widehat{\cos}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} \cos(t) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\xi-1)} dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\xi+1)} dt \\
 &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}(1)(\xi-1) + \mathcal{F}(1)(\xi+1)) \\
 &= \pi(\delta_1 + \delta_{-1}).
 \end{aligned}$$

2.2.3 Propriétés

Régularité et décroissance

On a vu par le théorème de Riemann-Lebesgue que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ pour $f \in L^1$. On a en fait que le taux de décroissance quand $|\xi| \rightarrow \infty$ est lié à la régularité de f .

Proposition 2.2.7 Une fonction f est bornée avec des dérivées jusqu'à l'ordre p continues et bornées si

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)(1 + |\xi|^p)| d\xi < +\infty.$$

Idées de preuve On sait que $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$ et donc

$$\begin{aligned}
 |f^{(k)}(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^k \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \\
 &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\xi|^k |\hat{f}(\xi)| e^{i\xi t} d\xi < +\infty
 \end{aligned}$$

et donc $|f^{(k)}|$ est bornée. ■

Cette proposition montre que si il existe K et $\varepsilon > 0$ tel que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{K}{1 + |\xi|^{p+1+\varepsilon}}$$

alors $f \in C^p$.

■ **Exemple 2.9** 1. Considérons la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1]$, $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

Cette fonction est discontinue et sa transformée de Fourier est donnée par $\hat{f}(\xi) = \text{sinc}(\xi)$. Ainsi, $|\hat{f}|$ est équivalente à $|\xi^{-1}|$ pour $|\xi| \rightarrow +\infty$. Ainsi, il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ pour vérifier les hypothèses de la proposition 2.2.7.

2. Considérons maintenant $g = f * f$. La fonction g vérifie donc

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x/2, & -2 \leq x \leq 0, \\ 1 - x/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est donc une fonction continue. On calcule aisément sa transformée de Fourier par $\hat{g}(\xi) = \hat{f}^2(\xi) = \text{sinc}^2(\xi)$. Ainsi, \hat{g} est équivalente à $|\xi^{-2}|$ pour $|\xi| \rightarrow +\infty$. La proposition est donc vérifiée pour $p = 0$ et la fonction g est continue et bornée.

3. On a immédiatement en continuant ce procédé que $h = f * f * f$ est de classe C^1 car $|\hat{h}|$ se comporte comme $|\xi^{-3}|$ en $|\xi| \rightarrow +\infty$. ■

R La proposition 2.2.7 est à la base de la définition des espaces de Sobolev.

Principe d'incertitude de Heisenberg

On se pose la question de savoir si une fonction peut être à la fois localisée en espace et en fréquence (ce qui correspond à une localisation de sa transformée de Fourier). On a vu que $\widehat{\delta}_\tau(\xi) = e^{-i\tau\xi}$ et donc $\widehat{\delta}_0 = 1$. Or un Dirac a un support très localisé en temps puisqu'il est réduit à un point, mais par contre, le support devient infini en fréquence. Réciproquement, si $f(t) = 1$, alors $\widehat{f}(\xi) = 2\pi\delta_0(\xi)$. On a donc une compétition entre localisation spatiale et localisation fréquentielle : une bi-localisation est limitée. Ainsi, une concentration dans un domaine va conduire à un étalement dans l'autre : le produit des étalements est minoré. Pour définir la localisation, on fait intervenir la fonction densité de probabilité

$$P(a \leq g(t) \leq b) = \int_a^b g(t)dt \quad \text{si} \quad \int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 1.$$

Les quantités importantes sont

$$\begin{aligned} \text{Moyenne} \quad \mu_f &= \mathbb{E}(g) = \int_{\mathbb{R}} tg(t)dt, \\ \text{Variance} \quad \sigma_g^2 &= \mathbb{E}[(g - \mu_g)^2] = \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_g)^2 g(t)dt, \end{aligned}$$

plus la variance sera grande, plus grand sera l'étalement. Cependant, un signal n'est pas nécessairement de masse 1. Par contre, on sait que $\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|^2}{\|f\|_2^2} = 1.$$

On adapte donc les définitions de moyenne et variance en choisissant $g = |f|^2/\|f\|_2^2$ pour définir la moyenne et la variance temporelles

$$\mu_f = \int_{\mathbb{R}} t \frac{f(t)}{\|f\|_2^2} dt \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_t)^2 \frac{f(t)}{\|f\|_2^2} dt.$$

- **Exemple 2.10**
- Soit $b(t) = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}$, alors $\mu_t = 0$ et $\sigma_t^2 = 1/12$.
 - Soit $\text{sinc}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin t}{t}$, alors $|\text{sinc}(t)|^2$ décroît comme $1/|t|^2$ et $\sigma_t^2 = +\infty$.
 - La gaussienne $g(t) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2}$ a pour moyenne et variance $\mu_t = 0$ et $\sigma_t^2 = 1/(4\alpha)$. ■

Concernant l'étalement en fréquence, par Parseval, on sait

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 dt = \|\widehat{f}(\xi)\|^2 = 2\pi \|f(t)\|^2 \implies \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{2\pi \|f(t)\|^2} d\xi$$

et donc on définit

$$\mu_f := \int_{\mathbb{R}} \xi \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{2\pi \|f\|^2} d\xi \quad \text{et} \quad \sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} (\xi - \mu_f)^2 \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{2\pi \|f\|^2} d\xi$$

- **Exemple 2.11** On a $\widehat{g}(\xi) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\xi^2/(4\alpha)}$ et donc les moyenne et écart-type sont donnés par $\mu_f = 0$ et $\sigma_f^2 = \alpha$ de sorte que $\sigma_t^2 \sigma_f^2 = 1/4$. ■

L'égalité précédente n'est valable que pour les gaussiennes. On a en fait le résultat donnant le principe d'incertitude de Heisenberg

Théorème 2.2.8 — Incertitude de Heisenberg. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors le produit de ses étalements temporels et fréquentiels est minoré par

$$\sigma_t^2 \sigma_f^2 \geq \frac{1}{4}.$$

La borne inférieure est atteinte pour les gaussiennes.

On peut représenter cette incertitude par des boîtes de Heisenberg dans le plan temps-fréquence : ce sont des boîtes centrées en (μ_t, μ_f) qui s'étendent sur le domaine rectangulaire $(2\sigma_t, 2\sigma_f)$, l'aire de la boîte étant d'au moins de 2 (voir Figure 2.1).

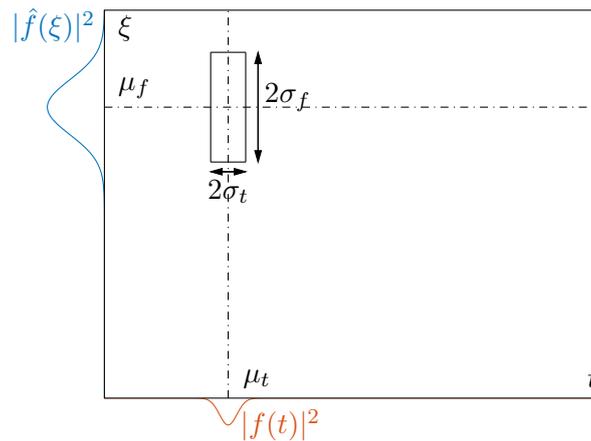


FIGURE 2.1 – Boîtes de Heisenberg

L'effet d'un **shift en temps ou en fréquence** est aisément identifiable avec les boîtes de Heisenberg comme on l'identifie sur la figure 2.2. Les nouvelles fonctions sont pour un shift en temps $g(t) = f(t - t_0)$ et $\hat{g}(\xi) = e^{-it_0\xi} \hat{f}(\xi)$, et pour un shift en fréquence $g(t) = e^{i\xi_0 t} f(t)$ et $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \xi_0)$.

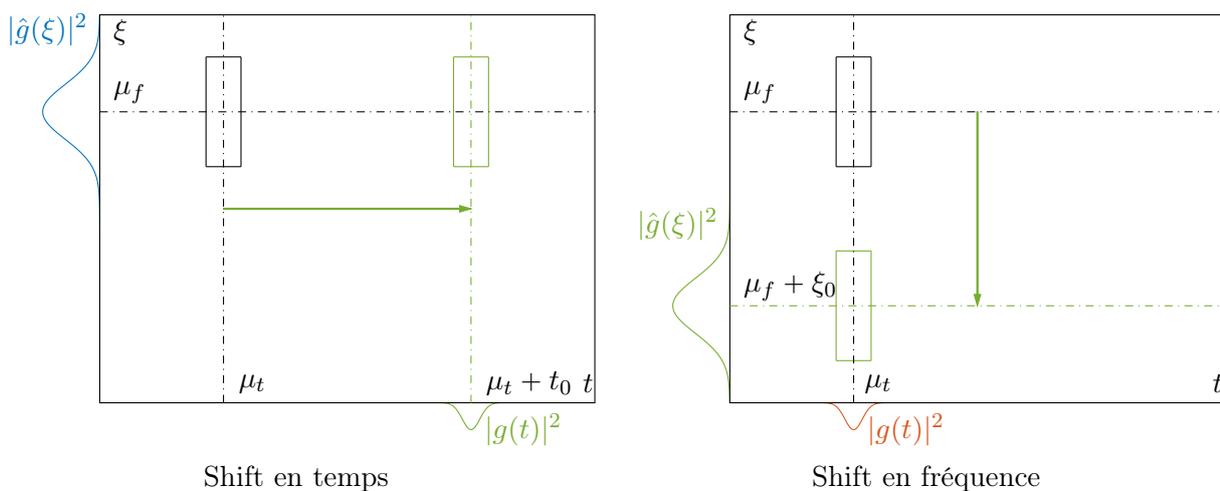


FIGURE 2.2 – Boîtes de Heisenberg

Observons maintenant l'effet d'un **changement d'échelle** (cf. Fig. 2.3) où on définit $g(t) = \sqrt{a}f(at)$, $a > 0$. On sait que si $g(t) = f(t/s)$, alors $\hat{g}(\xi) = |s|\hat{f}(s\xi)$. Ici, $s = 1/a$ de

sorte que

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

On remarque que ce changement d'échelle laisse la norme L^2 invariante. En effet

$$\|g\|^2 = \int_{\mathbb{R}} a|f(at)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy = \|f\|^2$$

où on a fait le changement de variable $y = at$.

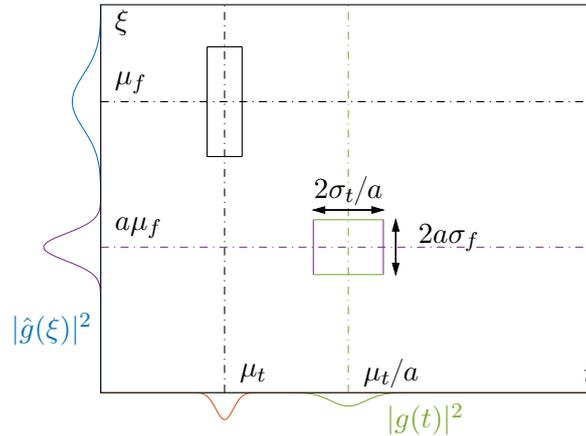


FIGURE 2.3 – Boîtes de Heisenberg et changement d'échelle

Comme on le voit sur ces figures, un shift (décalage) ou un changement d'échelle ne modifie pas l'aire des boîtes de Heisenberg : compresser un signal dans un domaine l'étire dans l'autre.

En conclusion, on peut résumer ces différents effets dans le tableau 2.1

Fonction	Moy. temps	Étal. temps	Fourier	Moy. Fréq	Étal. Fréq
$f(t)$	μ_t	σ_t	$\hat{f}(\xi)$	μ_f	σ_f
$f(t - t_0)$	$\mu_t + t_0$	σ_t	$e^{-it_0\xi} \hat{f}(\xi)$	μ_f	σ_f
$e^{i\xi_0 t} f(t)$	μ_t	σ_t	$\hat{f}(\xi - \xi_0)$	$\mu_f + \xi_0$	σ_f
$\sqrt{a} f(at)$	μ_t/a	σ_t/a	$\frac{1}{\sqrt{a}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$	$a\mu_f$	$a\sigma_f$

TABLE 2.1 – Effet des shifts et changement d'échelle



3. La révolution discrète

On a vu que l'enregistrement de sources sonores (signal) ou d'images se faisait à partir d'échantillons obtenus par l'échantillonnage d'un signal (resp. image) analogique. Les questions que l'on peut se poser sont :

- peut-on reconstruire un signal à partir d'un échantillonnage ?
- quel est l'effet de la transformée de Fourier ?

3.1 Échantillonnage des signaux analogiques

La méthode la plus simple pour discrétiser un signal consiste à enregistrer ses valeurs $\{f(ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ à intervalle de s . Une approximation de $f(t)$ à n'importe quel instant $t \in \mathbb{R}$ peut être obtenue en interpolant ces échantillons grâce aux résultats qui suivent.

3.1.1 Théorème d'échantillonnage de Shannon-Whittaker

Un signal discret peut être représenté comme une somme de Dirac. À l'échantillon $f(ns)$, on associe un Dirac $f(ns)\delta(t - ns)$ localisé en $t = ns$. Un échantillonnage correspond donc à $f_d = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns)\delta(t - ns)$. Or, $\mathcal{F}(\delta(t - ns)) = e^{-ins\xi}$ et donc $\hat{f}_d(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns)e^{-ins\xi}$. Pour calculer $f(t)$ à partir de ses échantillons $f(ns)$, on fait le lien entre \hat{f} et \hat{f}_d .

Théorème 3.1.1 Soit f une fonction et f_d son échantillonnage $f_d = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns)\delta(t - ns)$ de pas s . Alors,

$$\hat{f}_d(\xi) = \frac{1}{s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi - \frac{2k\pi}{s}\right).$$

Preuve D'après la définition d'un Dirac (non nul seulement en $t = ns$), on a $f(ns)\delta(t - ns) = f(t)\delta(t - ns)$ et donc $f_d(t) = f(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - ns) = f(t)c(t)$, où $c(t)$ est le peigne de Dirac. Ainsi,

$$\hat{f}_d(\xi) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{c}(\xi).$$

On sait par la formule de Poisson que

$$\hat{c}(\xi) = \frac{2\pi}{s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\xi - \frac{2\pi k}{s}\right).$$

Comme $\hat{f} * \hat{c}(\xi - \omega) = \hat{f}(\xi - \omega)$, on a le résultat. ■

Ainsi, ce théorème montre que l'échantillonnage de f à intervalles de s rend sa transformée de Fourier $2\pi/s$ périodique en sommant ses translatés $\hat{f}(\xi - 2\pi k/s)$. En effet,

$$\hat{f}_d\left(\xi - \frac{2\pi}{s}\right) = \frac{1}{s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{s} - \frac{2\pi k}{s}\right) = \hat{f}_d(\xi).$$

On en déduit le théorème

Théorème 3.1.2 — Shannon-Whittaker. Si le support de \hat{f} est inclus dans $[-\pi/s, \pi/s]$ ($2\pi/s$ périodique), alors

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns) \phi_s(t - ns), \quad \text{avec } \phi_s(t) = 2 \frac{\sin(\pi t/s)}{\pi t/s}.$$

Preuve Si $n \neq 0$, $\text{supp} \hat{f}(\xi - n\pi/s)$ n'intersecte pas $\text{supp} \hat{f}(\xi)$ car $\hat{f}(\xi) = 0$ pour $|\xi| > \pi/s$ (par hypothèse du théorème). Ainsi, en utilisant le théorème précédent, on a

$$\hat{f}_d(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{s} \quad \text{si } |\xi| \leq \frac{\pi}{s}$$

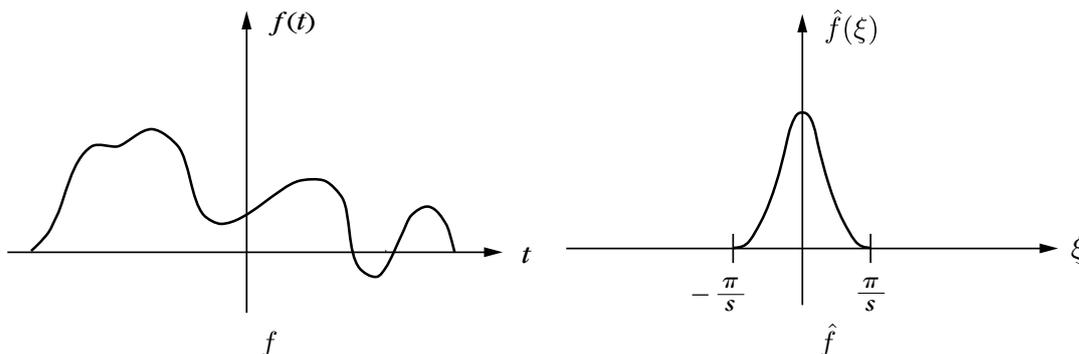
soit encore $\hat{f}(\xi) = s \hat{f}_d(\xi)$ si $|\xi| \leq \pi/s$.

Or, on a vu que $\hat{\phi}_s = s \mathbb{1}_{[-\pi/s, \pi/s]}$ et comme $\text{supp} \hat{f} \in [-\pi/s, \pi/s]$, $\hat{f}(\xi) = \hat{\phi}_s \hat{f}_d(\xi)$. Par transformée de Fourier inverse, on obtient

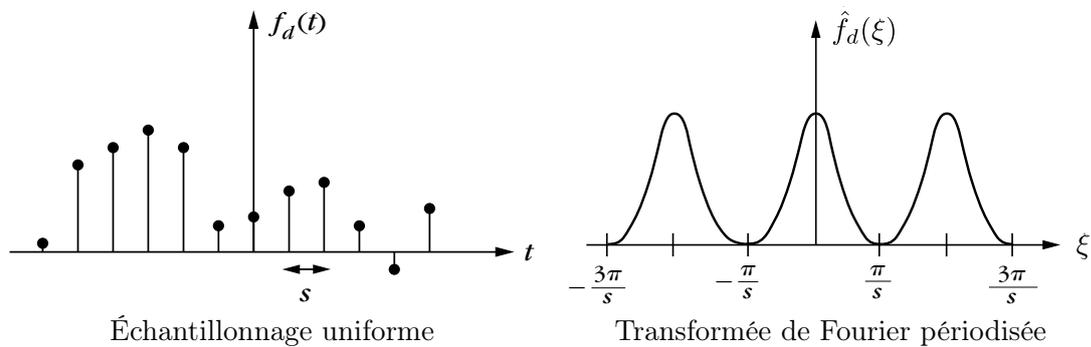
$$\begin{aligned} f(t) &= \phi_s * f_d(t) \\ &= \phi_s * \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns) \delta(t - ns) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns) \phi_s(t - ns) \end{aligned}$$

Il semble donc que l'on puisse reconstruire f tout entier en n'importe quel point sous la condition que $\text{supp} \hat{f} \subset [-\pi/s, \pi/s]$, ce qui garantit que f n'a pas de fortes variations entre deux échantillons car un spectre borné implique de la régularité de f .

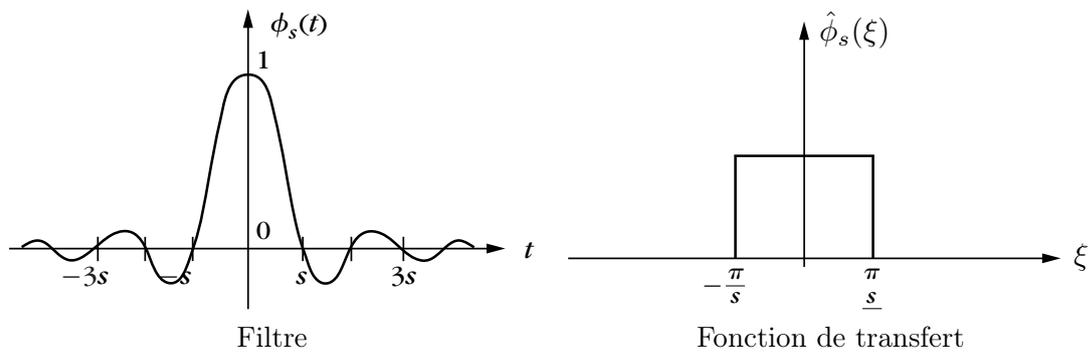
Soit f un signal et sa transformée de Fourier



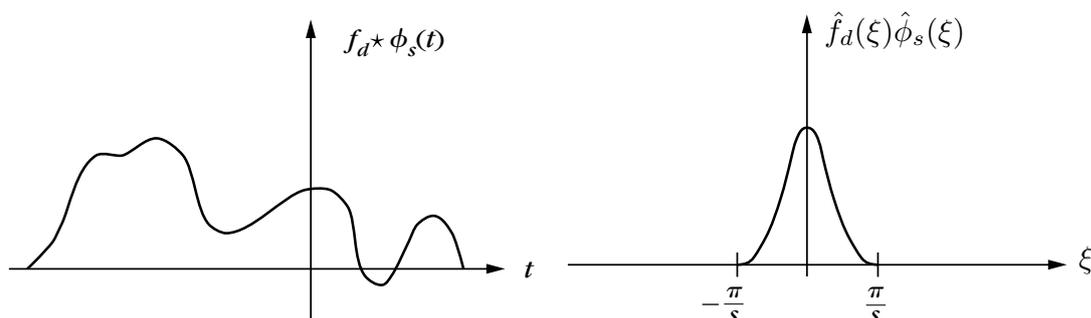
L'échantillonnage uniforme du signal f rend sa transformée de Fourier périodique.



On construit un filtre idéal passe-bas.



Le filtrage par le filtre passe-bas permet de reconstruire le signal



3.1.2 Aliasing

Dans la pratique, on ne peut pas connaître une infinité d'échantillons (ce qui est nécessaire pour pouvoir appliquer le théorème) et/ou $\text{supp } \hat{f} \not\subset [-\pi/s, \pi/s]$. Le théorème n'est donc plus applicable et si on utilise la formule de Shannon ci-dessus, on engendre une erreur qui fabrique une fonction différente de f . Analysons cette erreur.

Supposons que $\text{supp} \hat{f} \not\subset [-\pi/s, \pi/s]$. Il existe donc au moins un k tel que $\text{supp} \hat{f}(\xi - 2k\pi/s) \cap \text{supp} \hat{f}(\xi) \neq \emptyset$. Ce repliement des composantes de haute fréquence $|\xi| > \pi/s$ sur un intervalle à basse fréquence $|\xi| \leq \pi/s$ s'appelle aliasing. En présence d'aliasing, le signal interpolé

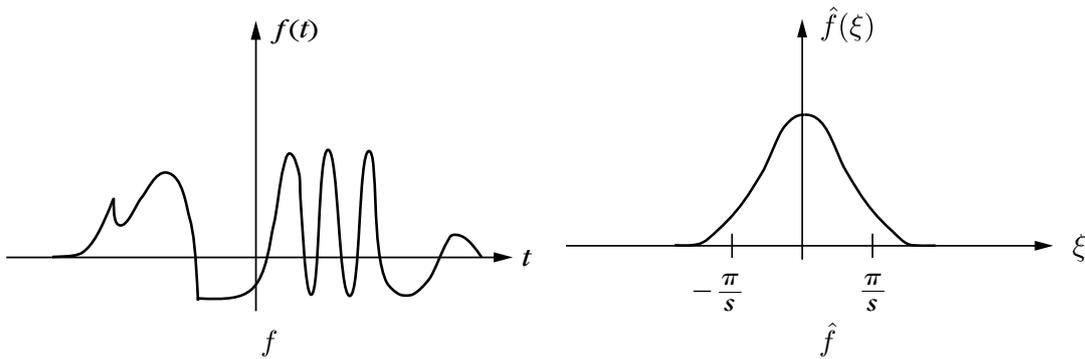
$$\phi_s * f_d(t) = \phi_s * \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns) \delta(t - ns)$$

a pour transformée de Fourier

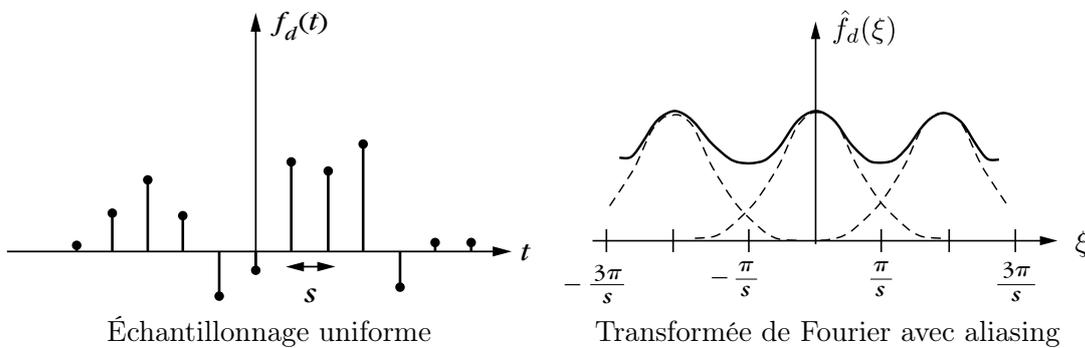
$$\widehat{\phi_s f_d}(\xi) = s \hat{f}_d(\xi) \mathbb{1}_{[-\pi/s, \pi/s]}(\xi) = \mathbb{1}_{[-\pi/s, \pi/s]}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi - 2k\pi/s)$$

qui peut être complètement différent de $\hat{f}(\xi)$ sur l'intervalle $[-\pi/s, \pi/s]$ et donc le signal $\phi_s * f_d(t)$ peut être une approximation de mauvaise qualité de f . Le terme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi - 2k\pi/s)$ qu'on amène dans l'intervalle $[-\pi/s, \pi/s]$ des fréquences qui viennent d'en dehors de cet intervalle : il y a donc bien repliement des hautes fréquences sur $[-\pi/s, \pi/s]$.

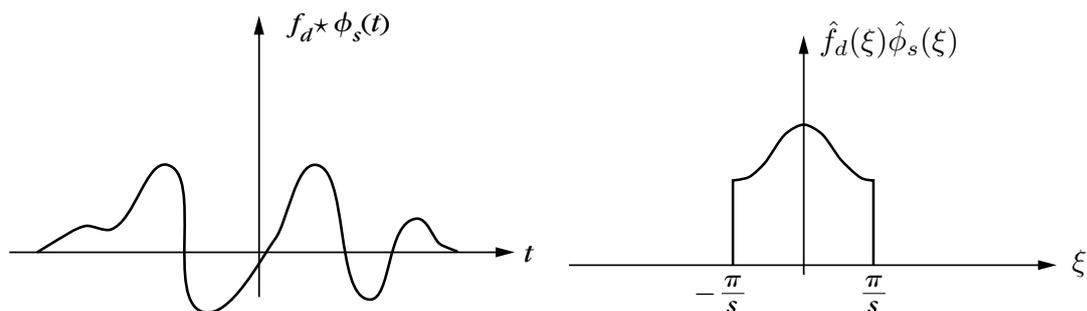
Soit f un signal et sa transformée de Fourier à support plus grand que $|\xi| \leq \pi/s$.



L'échantillonnage uniforme du signal f introduit un aliasing produit par un overlapping de $\hat{f}(\xi - 2k\pi/s)$ pour différent k .



Le filtrage par le filtre passe-bas crée un signal basse fréquence différent du signal originel f .



■ **Exemple 3.1** Considérons une oscillation haute fréquence

$$f(t) = \cos(\xi_0 t) = \frac{e^{i\xi_0 t} + e^{-i\xi_0 t}}{2}$$

donc la transformée de Fourier est $\hat{f}(\xi) = \pi(\delta(\xi - \xi_0) + \delta(\xi + \xi_0))$. Le signal reconstruit par la formule de Poisson est donc

$$\widehat{\phi_s} \hat{f}_d(\xi) = \pi \mathbb{1}_{[-\pi/s, \pi/s]}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta(\xi - \xi_0 - 2\pi k/s) + \delta(\xi + \xi_0 - 2\pi k/s)).$$

Si on suppose que $\xi_0 \in]\pi/s, 2\pi/s[$, on a le repliement du spectre représenté sur la figure 3.1

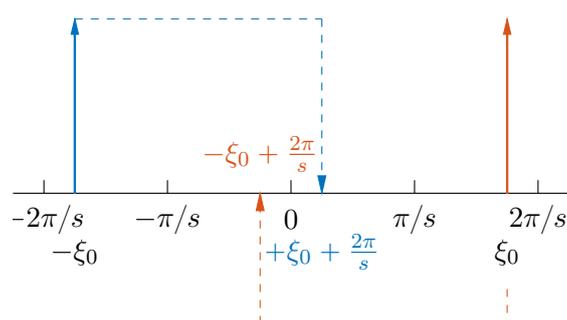
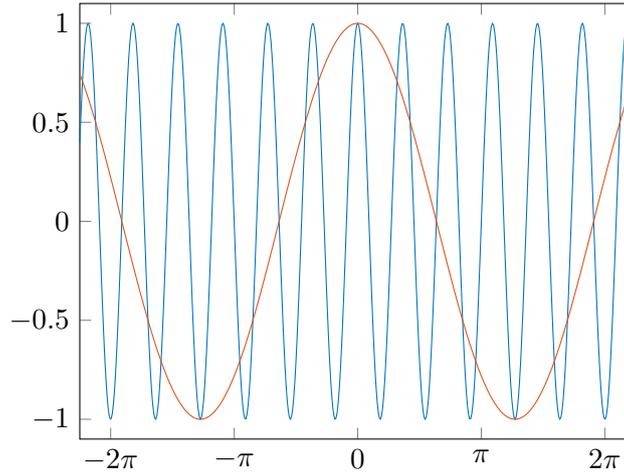


FIGURE 3.1 – Repliement de fréquences

d'où $\widehat{\phi_s} \hat{f}_d(\xi) = \pi(\delta(\xi - \xi_0 - 2\pi/s) + \delta(\xi + \xi_0 - 2\pi/s))$ et donc

$$f_d * \phi_s(t) = \cos\left(\left(\frac{2\pi}{s} - \xi_0\right)t\right).$$

FIGURE 3.2 – f (bleu) et $f_d * \phi_s$ (rouge)

L'aliasing ramène donc la haute fréquence ξ_0 ($|\xi_0| > \pi/s$) à une fréquence plus basse $2\pi/s - \xi_0 \in [-\pi/s, \pi/s]$ d'où un repliement de fréquences. ■

Comment procéder pour supprimer l'aliasing? Afin de le supprimer (ou tout du moins l'atténuer), il faut approcher f par le signal le plus proche \tilde{f} dont la transformée de Fourier a son support dans $[-\pi/s, \pi/s]$. On cherche donc à minimiser la distance de \tilde{f} à f . La formule de Plancherel donne

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi) - \hat{\tilde{f}}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\xi| > \pi/s} |\hat{f}(\xi) - \hat{\tilde{f}}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \leq \pi/s} |\hat{f}(\xi) - \hat{\tilde{f}}(\xi)|^2 d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \pi/s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \pi/s} |\hat{f}(\xi) - \hat{\tilde{f}}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

car $\text{supp } \hat{\tilde{f}} \subset [-\pi/s, \pi/s]$. La distance est minimale lorsque la seconde intégrale est nulle. On demande donc que

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad \text{sur } [-\pi/s, \pi/s]$$

soit encore

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = \hat{f}(\xi) \mathbb{1}_{[-\pi/s, \pi/s]}(\xi) = \frac{1}{s} \widehat{\phi_s}(\xi) \hat{f}(\xi)$$

ce qui correspond à $\tilde{f}(t) = \frac{1}{s} f * \phi_s(t)$.

Ainsi, le filtrage de f par ϕ_s empêche l'aliasing en supprimant toutes les fréquences supérieures à π/s . Comme $\text{supp } \hat{\tilde{f}} \subset [-\pi/s, \pi/s]$, on peut appliquer le théorème d'échantillonnage et donc on récupère $\tilde{f}(t)$ à partir des échantillons $\tilde{f}(ns)$.

Un convertisseur analogique-numérique est donc composé d'un filtre qui limite les fréquences à la bande $[-\pi/s, \pi/s]$ et suivi par un échantillonnage uniforme.

3.1.3 Échantillonnage général

La lecture de ce paragraphe n'est pas nécessaire dans un premier temps.

Le théorème de Shannon-Whittaker est un exemple particulier de conversion analogique-numérique. Il existe d'autre conversion.

On veut en fait trouver une approximation stable de $f \in L^2(\mathbb{R})$ à partir d'un filtrage et d'un échantillonnage uniforme qui donne $\{f * \overline{\phi_s}(ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ pour un filtre réel $\overline{\phi_s}$ soit

$$f * \overline{\phi_s}(ns) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi_s}(ns - t) dt = \langle f(t), \phi_s(t - ns) \rangle_{L^2}$$

où on a défini $\phi_s(t) = \overline{\phi_s}(-t)$. Les échantillons peuvent donc être construits par un produit scalaire.

Considérons U_s l'espace d'approximation $\text{Vect}\{\phi_s(t - ns)\}$. L'approximation $\tilde{f} \in U_s$ qui minimise la distance $\|f - \tilde{f}\|_{L^2}$ est la projection orthogonale de f sur U_s . Le calcul de cette projection orthogonale est stable (possible) si $\{\phi_s(t - ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de U_s puisque dans ce cas là, on a un produit scalaire qui satisfait une équivalence d'énergie. Le théorème d'échantillonnage généralisé suivant donne la projection orthogonale sur U_s

Théorème 3.1.3 Soit $\{\phi_s(t - ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une base de Riesz de U_s et $\phi_s(t) = \overline{\phi_s}(-t)$. Il existe une base biorthogonale $\{\tilde{\phi}_s(t - ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de U_s telle que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad P_{U_s} f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f * \overline{\phi_s}(ns) \tilde{\phi}_s(t - ns).$$

Si on écrit le signal discret $f_d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f * \overline{\phi_s}(ns) \delta(t - ns)$, alors la projection orthogonale $P_{U_s}(f)$ peut être écrite comme un filtre analogique de f_d :

$$P_{U_s} f(t) = f_d * \tilde{\phi}_s(t).$$

- Si $f \in U_s$, alors $P_{U_s} f = f$ et donc f est reconstruite en filtrant le signal discret d'échantillons $\{f * \overline{\phi_s}(ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ avec le filtre analogique $\tilde{\phi}_s(t)$.
- Si $f \notin U_s$, alors $P_{U_s} f$ est la meilleure approximation de f dans U_s .

Le théorème suivant caractérise les filtres ϕ_s qui génèrent une base de Riesz.

Théorème 3.1.4 Un filtre ϕ_s génère une base de Riesz $\{\phi_s(t - ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de U_s si et seulement si $\exists B \geq A > 0$ telles que $\forall \xi \in [0, 2\pi/s]$,

$$A \leq \frac{1}{s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi_s}(\xi - \frac{2k\pi}{s})|^2 \leq B.$$

La base biorthogonale $\{\tilde{\phi}_s(t - ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie par le filtre dual $\tilde{\phi}_s$ qui vérifie

$$\widehat{\tilde{\phi}_s}(\xi) = \frac{s \widehat{\phi_s}^*(\xi)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi_s}(\xi - 2k\pi/s)|^2}.$$

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante sur le filtre passe base $\overline{\phi_s}(t) = \phi_s(-t)$ pour obtenir une approximation stable à partir d'un échantillonnage uniforme de pas s . Pour différents pas s , le filtre ϕ_s peut être obtenu en dilatant un filtre $\phi_s(t) = s^{-1/2} \hat{\phi}(t/s)$ et donc $\widehat{\phi_s}(\xi) = s^{1/2} \hat{\phi}(s\xi)$. La condition nécessaire et suffisante de base de Riesz est donc satisfaite si et seulement si

$$\forall \xi \in [-\pi, \pi], \quad A \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi_s}(\xi - 2k\pi)|^2 \leq B.$$

Quand $A = B = 1$, la base de Riesz est orthonormée et on a donc

Corollaire 3.1.5 La famille $\{\phi_s(t - ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de U_s avec $\phi_s(t) = s^{-1/2}\phi(t/s)$ si et seulement si $\forall \xi \in [0, 2\pi]$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}_s(\xi - 2k\pi)|^2 = 1$$

et le filtre dual est $\widetilde{\phi}_s = \phi_s$.

Le théorème de Shannon-Whittaker est donc un cas particulier où le filtre passe bas est un sinus cardinal $\phi_s(t) = s^{1/2}\text{sinc}(\pi t/s)$ et $\{\phi_s(t - ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de U_s de fonctions dont les transformées de Fourier ont un support dans $[-\pi/s, \pi/s]$ et si $f \in U_s$, $f(ns) = s^{-1/2}f * \phi_s(ns)$.

3.2 Fourier et les signaux discrets

3.2.1 Série de Fourier

On a vu qu'après échantillonnage uniforme de pas s , $f_d = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns)\delta(t - ns)$ et $\widehat{f}_d(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(ns)e^{-ins\xi}$. Si $s = 1$, alors la collection $\{f(ns)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $f_d = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\delta(t - n)$, soit par suite $\widehat{f}_d(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)e^{-in\xi}$ qui est une série de Fourier. La série de Fourier est donc un cas particulier de transformée de Fourier pour des fonctions qui sont des sommes de Dirac.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $e^{-in\xi}$ est de période 2π et par conséquent, les séries de Fourier sont de période 2π . Une fonction 2π -périodique peut être caractérisée par sa restriction à $[-\pi, \pi]$. On considère les fonctions $f \in L^2([-\pi, \pi])$. On a vu que la famille des $\{e^{-ik\xi}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2([-\pi, \pi])$ et donc toute fonction de $L^2([-\pi, \pi])$ peut s'écrire comme une série de Fourier.

Ainsi, si $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, alors la série de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\xi}$ peut s'interpréter comme la décomposition de $\widehat{f} \in L^2([-\pi, \pi])$ sur une base orthonormée. Les coefficients f_n peuvent donc s'écrire

$$f_n = \langle \widehat{f}(\xi), e^{-i\xi n} \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi n} d\xi$$

et on a l'identité de Plancherel

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 = \|\widehat{f}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$



L'identité $\widehat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\xi}$ n'est pas une identité ponctuelle mais s'entend au sens de la convergence en moyenne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \widehat{f}(\xi) - \sum_{k=-N}^N f_k e^{-ik\xi} \right\| = 0.$$

3.2.2 Signaux finis

Jusqu'ici, on a considéré un nombre infini d'échantillons $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. En pratique, on ne connaît qu'un nombre N fini d'échantillons $0 \leq n \leq N - 1$. Il faut donc redéfinir les convolutions (effets de bords en 0 et $N - 1$) et les transformées de Fourier.

Convolutions circulaires

Soit (\tilde{f}_n) et (\tilde{h}_n) définies pour $0 \leq n \leq N-1$. Si on souhaite calculer la convolution $(\tilde{f} * \tilde{h})_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_p \tilde{h}_{n-p}$, il faut connaître \tilde{f}_n et \tilde{h}_n au delà de $0 \leq n \leq N-1$. On fait le choix d'étendre ces suites par périodisation sur N échantillons

$$f_n = \tilde{f}_{n[N]} \quad \text{et} \quad h_n = \tilde{h}_{n[N]}.$$

La convolution circulaire de (f_n) et de (h_n) de période N est la somme restreinte à leur période

$$(f \circledast h)_n = \sum_{p=0}^{N-1} f_p \tilde{h}_{n-p} = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{f}_{n-p} \tilde{h}_p.$$

C'est un signal de période N .

Transformée de Fourier discrète

L'espace des signaux périodiques de période N est un espace euclidien de dimension N , muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_n^*.$$

On a le théorème suivant qui montre que tout signal périodique de période N se décompose comme une somme de sinusoides discretes.

Théorème 3.2.1 La famille $\left\{ e_{k,n} = \exp\left(i \frac{2\pi kn}{N}\right) \right\}_{0 \leq k < N}$ est une base orthogonale de l'espace des signaux de période N .

On peut donc décomposer f de période N

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_{k,n}\|^2} e_n.$$

Définition 3.2.1 La transformée de Fourier discrète de f (DFT : Discrete Fourier Transform en anglais) est

$$\hat{f}_k = \langle f, e_{k,n} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Comme $\|e_{k,n}\|^2 = N$, on a la transformée inverse

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}}.$$

On a par orthogonalité la formule de Plancherel

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}_k|^2$$

Théorème 3.2.2 Si (f_n) et (h_n) sont de période N , la DFT de $g = f \circledast h$ vaut $\hat{g}_k = \hat{f}_k \hat{h}_k$.

Cette formule est particulièrement intéressante car elle permet un calcul rapide d'une convolution

Preuve

$$\begin{aligned}
(\widehat{f \circledast h})_k &= \sum_{n=0}^{N-1} (f \circledast h)_n e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} f_{n-p} h_p e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} f_{n-p} h_p e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} e^{-i \frac{2\pi}{N} (pk-pk)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} f_{n-p} h_p e^{-i \frac{2\pi}{N} (n-p)k} e^{-i \frac{2\pi}{N} pk} \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} h_p e^{-i \frac{2\pi}{N} pk} \sum_{n=0}^{N-1} f_{n-p} e^{-i \frac{2\pi}{N} (n-p)k} \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} h_p e^{-i \frac{2\pi}{N} pk} \sum_{\ell=-p}^{N-1-p} f_{\ell} e^{-i \frac{2\pi}{N} \ell n}.
\end{aligned}$$

Or, f_{ℓ} est périodique de période N . Il en est de même pour $e^{-i \frac{2\pi}{N} k \ell}$ qui est elle aussi périodique en ℓ à k fixé de période N . On a vu que la somme d'une suite périodique ne dépend pas de la période sur laquelle on fait la somme. Ainsi

$$\sum_{\ell=-p}^{N-1-p} f_{\ell} e^{-i \frac{2\pi}{N} k \ell} = \sum_{\ell=0}^{N-1} f_{\ell} e^{-i \frac{2\pi}{N} k \ell}$$

et donc

$$\widehat{f \circledast h}_k = \sum_{p=0}^{N-1} h_p e^{-i \frac{2\pi}{N} pk} \sum_{\ell=0}^{N-1} f_{\ell} e^{-i \frac{2\pi}{N} k \ell} = \widehat{h}_k \widehat{f}_k.$$

■

Proposition 3.2.3 Soit (f_n) et (g_n) deux suites de réels avec $0 \leq n \leq N-1$. Alors

$$\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}_k \widehat{g}_k = N \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{f}_k|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2.$$

Preuve Soit (h_n) la suite définie par $h_n = f_{-n}$. Alors

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f_{-n} e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} \\
&= \sum_{\ell=1-N}^0 f_{\ell} e^{i \frac{2\pi}{N} k \ell}, \quad \text{l'argument est une suite périodique} \\
&= \sum_{\ell=0}^{N-1} f_{\ell} e^{i \frac{2\pi}{N} k \ell} = \overline{\widehat{f}_k}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}_k \widehat{g}_k &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{h}_k \widehat{g}_k \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{(h \circledast g)}_k \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{(h \circledast g)}_k e^{i \frac{2\pi}{N} k 0} \\
 &= N (h \circledast g)_0, \quad \text{par DFT inverse} \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} h_{0-n} g_n = N \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_n.
 \end{aligned}$$

■

Nous pouvons prouver que la formule donnant la transformée inverse de Fourier discrète redonne bien le signal (f_n) . Pour cela, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}_k e^{i \frac{2\pi}{N} kn} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} f_p e^{-i \frac{2\pi}{N} kp} \right) e^{i \frac{2\pi}{N} kn} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} f_p \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{N} k(p-n)}.
 \end{aligned}$$

Étudions la somme $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{N} k(p-n)}$.

Cas $p = n$ $\sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$

Cas $p \neq n$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i \frac{2\pi}{N} (p-n)} \right)^k &= \sum_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{1 - a^N}{1 - a} \\
 &= \frac{1 - e^{-i 2\pi (p-n)}}{1 - a} = 0
 \end{aligned}$$

car $p - n \in \mathbb{Z}^*$.

Donc, le seul cas $p = n$ donne une somme non nulle et ainsi

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}_k e^{i \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} f_n N = f_n.$$

La DFT peut être définie sur \mathbb{Z} car on peut la périodiser. En effet, comme $e^{-i \frac{2\pi}{N} km} = e^{-i 2\pi (k+pN) \frac{m}{N}}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $e^{-i 2\pi pm} = 1$, $\forall p, m \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{f}_{k+pN} = \widehat{f}_k$ et donc $\widehat{f}_k^* = \widehat{f}_{-k}$ pour la suite périodisée. On peut donc représenter la DFT sur n'importe quelle période. On choisit l'intervalle $-N/2 \leq k \leq N/2 - 1$ pour \widehat{f}_k qui est symétrique par rapport à 0.

Concernant les dimensions supérieures et en particulier les images, la DFT devient

$$\widehat{w}_{k,l} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} w_{m,n} e^{-i \frac{2\pi}{N} (km+ln)}, \quad (k, l) \in \{0, \dots, N-1\}^2,$$

et

$$w_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{w}_{k,l} e^{i \frac{2\pi}{N} (km+ln)}, \quad (m,n) \in \{0, \dots, N-1\}^2.$$

3.2.3 La transformée de Fourier rapide

Pour un signal à N échantillons, le calcul direct des N sommes de Fourier discrètes

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

nécessite N^2 additions et multiplications complexes (N pour chaque somme et N sommes). Si N est grand, ou que l'on traite des images 2D (auquel cas N devient N^2), alors le coût calcul devient énorme.

De nombreux chercheurs ont étudié la possibilité de réduire le coût et c'est Cooley et Tukey qui ont donné un algorithme célèbre pour le cas des signaux dont le nombre d'échantillons N est une puissance de 2. C'est la Fast Fourier Transform (FFT) qui réduit le coût à $\mathcal{O}(N \log N)$.

Commençons par quelques manipulations algébriques et supposons $N = 2^\mu$. On a

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Si on note $\omega_N = e^{-i \frac{2\pi}{N}}$, on peut réécrire $\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \omega_N^{kn}$ de sorte que

$$\hat{f}_k = f_0 \omega_N^0 + f_1 \omega_N^k + f_2 \omega_N^{2k} + \dots + f_{N-2} \omega_N^{(N-2)k} + f_{N-1} \omega_N^{(N-1)k}.$$

- Comme N est pair (c'est une puissance de 2), $N-1$ est impair et $N = 2p$.
- On a vu que on peut assimiler les \hat{f}_k à une suite périodique de période N et donc étudier cette suite sur $-N/2 \leq k \leq N/2 - 1$ ce qui revient à regarder $0 \leq k \leq N/2 - 1$ puis $N/2 \leq k \leq N-1$.

Supposons donc pour commencer que $0 \leq k \leq N/2 - 1$, soit encore $0 \leq k \leq p-1$.

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= f_0 \omega_N^0 + f_1 \omega_N^k + f_2 \omega_N^{2k} + \dots + f_{N-2} \omega_N^{(N-2)k} + f_{N-1} \omega_N^{(N-1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n} \omega_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n+1} \omega_N^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n} \omega_N^{2nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n+1} \omega_N^{2nk}. \end{aligned}$$

Or, $\omega_N^{2nk} = e^{-i \frac{2\pi}{N} 2nk} = e^{-i \frac{2\pi}{N/2} nk} = \omega_{N/2}^{nk}$ d'où

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n} \omega_{N/2}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n+1} \omega_{N/2}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} \underbrace{f_{2n}}_{f_n^{\text{pair}}} \omega_p^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{p-1} \underbrace{f_{2n+1}}_{f_n^{\text{impair}}} \omega_p^{nk}, \end{aligned}$$

et donc $\hat{f}_k = \widehat{f_n^{\text{pair}}} + \omega_N^k \widehat{f_n^{\text{impair}}}$, $0 \leq k \leq p-1$.

Examinons maintenant le cas $N/2 \leq k \leq N-1$, soit encore $p \leq k \leq 2p-1$, ou encore si on pose $k = N/2 + \ell$, $0 \leq \ell \leq p-1$.

$$\begin{aligned}\widehat{f}_k &= \widehat{f}_{\frac{N}{2}+\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \omega_N^{n(\frac{N}{2}+\ell)} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n} \omega_N^{2n(\frac{N}{2}+\ell)} + \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n+1} \omega_N^{(2n+1)(\frac{N}{2}+\ell)}\end{aligned}$$

Il est possible de simplifier cette expression en constatant que

- $$\omega_N^{2n(N/2+\ell)} = e^{-2\frac{2\pi}{N}2n(\frac{N}{2}+\ell)} = \underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1, \forall n \in \mathbb{Z}} e^{-2\frac{2\pi}{N}2n\ell} = \omega_N^{2n\ell},$$

- $$\begin{aligned}\omega_N^{(2n+1)(N/2+\ell)} &= \omega_N^{2n(N/2+\ell)} \omega_N^{N/2+\ell} \\ &= \omega_N^{2n\ell} e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{N}\ell} \\ &= \omega_N^{2n\ell} \underbrace{e^{-i\pi}}_{=-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}\ell} = -\omega_N^{2n\ell} \omega_N^\ell,\end{aligned}$$

et on a vu que $\omega_N^{2n\ell} = \omega_{N/2}^{n\ell}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{\frac{N}{2}+\ell} &= \sum_{n=0}^{p-1} f_n \omega_{N/2}^{n\ell} - \omega_N^\ell \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n+1} \omega_{N/2}^{n\ell} \\ &= \widehat{f_\ell^{\text{pair}}} - \omega_N^\ell \widehat{f_\ell^{\text{impair}}}.\end{aligned}$$

Au final, on a pour $0 \leq k \leq N/2-1$ ou encore $0 \leq k \leq p-1$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_k &= \widehat{f_k^{\text{pair}}} + \omega_N^k \widehat{f_k^{\text{impair}}}, \\ \widehat{f}_{N/2+k} &= \widehat{f_k^{\text{pair}}} - \omega_N^k \widehat{f_k^{\text{impair}}}.\end{aligned}$$

Les nouvelles suites $\widehat{f_k^{\text{pair}}}$ et $\widehat{f_k^{\text{impair}}}$ sont des suites dont le nombre d'éléments mis en jeu est pair. En effet,

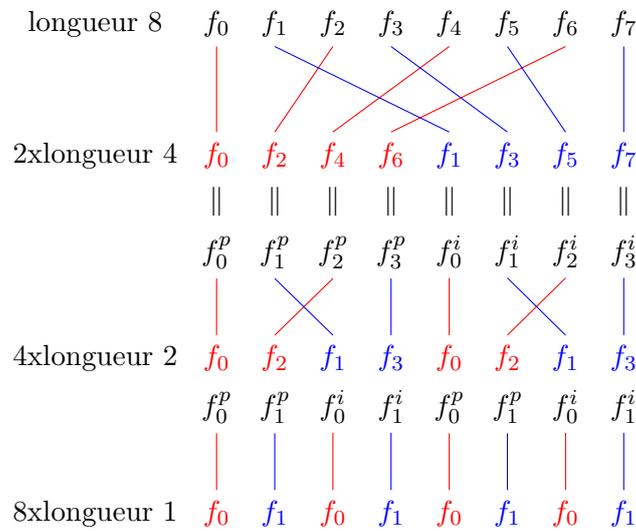
$$N = 2^\mu \quad \text{et} \quad p = \frac{N}{2} = 2^{\mu-1}.$$

On peut donc ré-appliquer les deux relations jusqu'à ce que $p = 1$. A ce moment là

$$\widehat{f}_0 = f_0$$

car
$$\sum_{n=1}^{p-1} f_n \omega_N^{nk} = f_0 \omega_N^0 = f_0.$$

■ **Exemple 3.2** Décomposition par FFT d'un vecteur de longueur 8



On peut donc construire l'algorithme récursif de la FFT. ■

Algorithm 1: Algorithme de la FFT

Entrée : f : signal de taille N (puissance de 2)

Sortie : \hat{f} : taille N (puissance de 2)

si $N = 1$ **alors**

 return $\hat{f}_0 = f_0$;

sinon

$p = N/2$;

 extraire les parties paires et impaires de $(f_n)_{0 \leq n \leq N-1}$;

 calculer les $(\widehat{f_n^{\text{pair}}})_{0 \leq n \leq p-1}$ et $(\widehat{f_n^{\text{impair}}})_{0 \leq n \leq p-1}$ par algo. FFT;

pour $k = 0$ **à** $N/2 - 1$ **faire**

$\hat{f}_k = \widehat{f_k^{\text{pair}}} + e^{-i\frac{2\pi}{N}k} \widehat{f_k^{\text{impair}}}$;

$\hat{f}_{N/2+k} = \widehat{f_k^{\text{pair}}} - e^{-i\frac{2\pi}{N}k} \widehat{f_k^{\text{impair}}}$;

fin

fin

On peut montrer que le coût de cet algorithme est $\mathcal{O}(N \log N) \ll \mathcal{O}(N^2)$.

Calcul de la DFT inverse

On définit

$$\text{DFT}(f_n) := \hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \omega_N^{kn}$$

et

$$\text{IDFT}(\hat{f}_k) := f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \omega_N^{-kn}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \text{DFT}(\overline{f_n}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{f_n} \omega_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{f_n \omega_N^{-kn}} \\
 &= \overline{\left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n \omega_N^{-kn} \right)} \\
 &= N \text{IDFT}(f_n)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\text{IDFT}(f_n) = \frac{1}{N} \overline{\text{DFT}(\overline{f_n})}.$$

Extension au calcul de la FFT 2D

Soit $(w_{m,n})_{0 \leq m \leq N-1}$ une image. On a vu

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k,\ell} &= \sum_{m,n=0}^{N-1} w_{m,n} e^{-2\frac{2\pi}{N}(km+\ell n)} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} w_{m,n} e^{-2\frac{2\pi}{N}(\ell n)}}_{\text{DFT du signal 1D } (w_{m,n})_{0 \leq n \leq N-1}} \right) e^{-2\frac{2\pi}{N}(km)}.
 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{DFT du signal 1D } \left(\sum_{n=0}^{N-1} w_{m,n} e^{-i\frac{2\pi}{N}\ell n} \right)_{0 \leq m \leq N-1}}$$

Donc, pour faire une FFT 2D pour les indices (k, ℓ) , on enchaîne deux FFT 1D.

Algorithm 2: Algorithme de la FFT 2D

Entrée : image w de taille $N \times N$ (N puissance de 2)

Sortie : \hat{w} : taille $N \times N$ (N puissance de 2)

pour $m = 0$ **à** $N - 1$ **faire**

 extraire la ligne $(w_{m,n})_{0 \leq n \leq N-1}$ (signal 1D);

 calcul la FFT 1D de ce signal ;

 ranger cette FFT à la ligne m d'une image temporaire $(v_{m,\ell})_{0 \leq \ell \leq N-1}$;

fin

pour $n = 0$ **à** $N - 1$ **faire**

 extraire la colonne $(v_{m,\ell})_{0 \leq m \leq N-1}$ (signal 1D);

 calcul la FFT 1D de ce signal ;

 ranger cette FFT à la colonne ℓ de \tilde{w} ;

fin

3.2.4 Sous-échantillonnage

On a vu que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac $c(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$ était donnée par la formule de Poisson

$$\hat{c}(\xi) = \frac{2\pi}{s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\xi - \frac{2\pi k}{s}\right).$$

Cette formule intervient pour le sous échantillonnage de rapport K des suites finies

Proposition 3.2.4 — Formule de Poisson. Soit $(f_n)_{0 \leq n \leq KN-1}$ une suite de réels. On note u le sous échantillonnage de rapport K : $u_n = f_{Kn}$, $0 \leq n \leq N-1$. On a alors

$$\hat{u}_k = \frac{1}{K} \sum_{\ell=0}^{K-1} \hat{f}_{k+\ell N}.$$

Preuve

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f_{Kn} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Par DFT inverse de f_{Kn} , on a

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{KN} \sum_{p=0}^{KN-1} \hat{f}_p e^{i\frac{2\pi}{KN}pKn} \right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

soit encore

$$\hat{u}_k = \frac{1}{KN} \sum_{p=0}^{KN-1} \hat{f}_p \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(k-p)n}. \quad (3.1)$$

- Si $p = k + jN$, $j \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(k-p)n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi jn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

- Sinon, en posant $a = e^{-i\frac{2\pi}{N}(k-p)}$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a} = \frac{1-e^{-i2\pi(k-p)}}{1-a} = 0.$$

D'où la somme $\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(k-p)n}$ ne donne des termes non nuls dans l'équation (3.1) que quand p est de la forme $p = k + \ell N$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Comme $0 \leq p \leq KN-1$, $0 \leq \ell \leq K-1$ et il y a K multiples de N dans $\{0, \dots, KN-1\}$, donc

$$\hat{u}_k = \frac{1}{KN} \sum_{\ell=0}^{K-1} N \hat{f}_{k+\ell N}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Ce théorème donne une nouvelle vision sur l'aliasing qu'on avait vu pour des signaux discrets (provenant d'un échantillonnage) à nombre infini de termes. En effet, il indique que le coefficient de Fourier du signal sous-échantillonné que l'on mesure est en fait la somme de plusieurs coefficients de Fourier de la fonction de départ. On appelle les fréquences en $k + \ell N$,

qui modifie la vraie valeur de \hat{u}_k , les alias.

Comme on l'a vu pour les signaux à étendue infinie ($n \in \mathbb{Z}$), on peut supprimer (du moins limiter) l'aliasing en effectuant une convolution avec l'échantillonnage. Il faut bien choisir le filtre h pour qu'il annule les alias : la convolution donne une multiplication en Fourier. On choisit donc $\hat{h}_k = 0$ (ou proche de 0) dès que k est un alias.

Pour les images $(u_{m,n})_{0 \leq m, n \leq N-1}$ sous échantillonnage de $(f_{m,n})_{0 \leq m, n \leq KN-1}$, la formule devient

$$\hat{u}_{k,j} = \frac{1}{K^2} \sum_{\ell_1=0}^{K-1} \sum_{\ell_2=0}^{K-1} \hat{f}_{k+\ell_1 N, j+\ell_2 N}.$$

3.2.5 Le théorème de Shannon pour les suites finies

Nous avons vu que le théorème de Shannon qui permet de reconstruire un signal analogique dont le support de la transformée de Fourier est compact à partir de la version échantillonnée de ce signal. Nous présentons maintenant le résultat sur des suites discrètes. On suppose que N est pair.

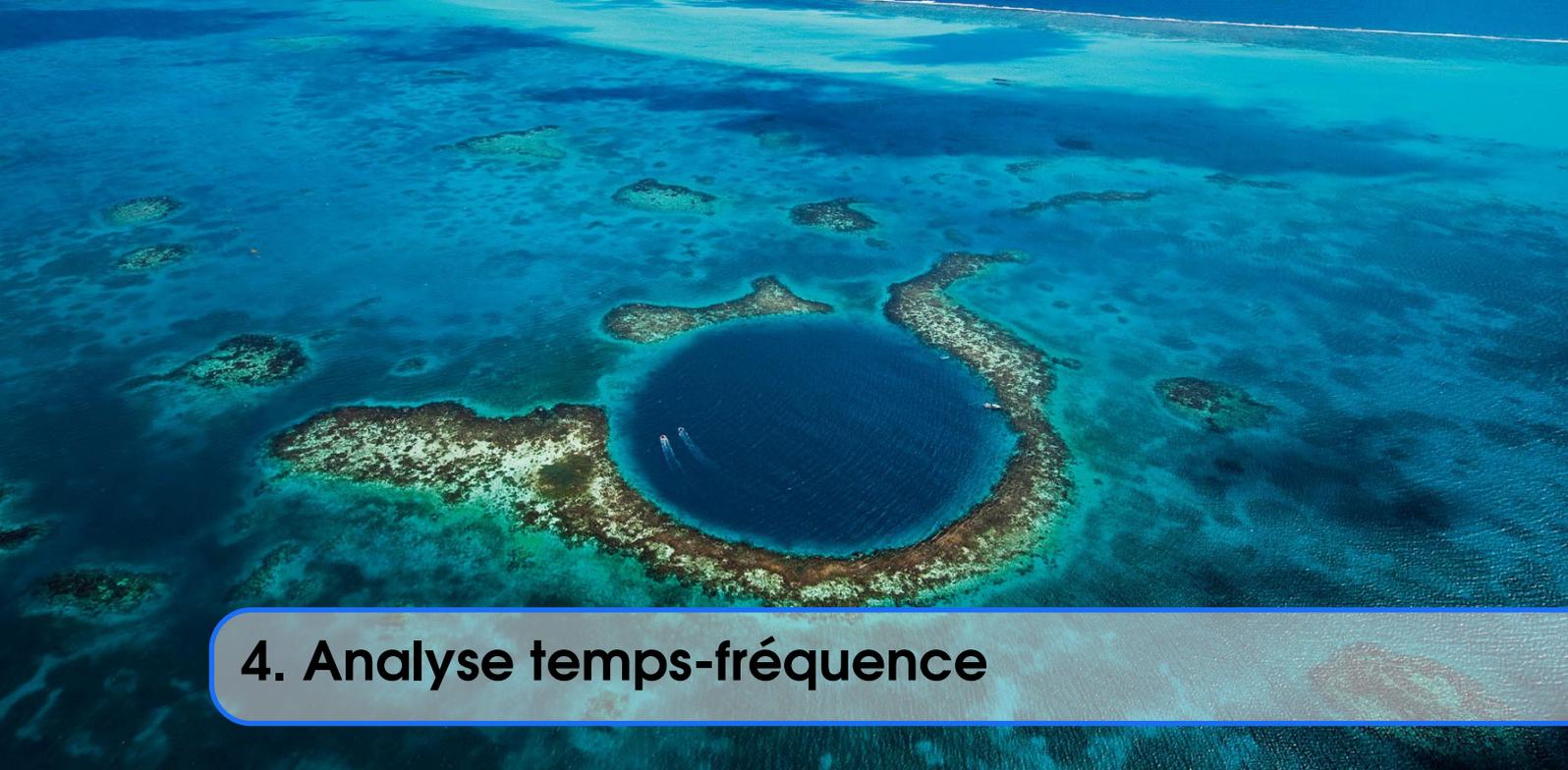
Proposition 3.2.5 — Shannon. Soit $(f_n)_{0 \leq n \leq KN-1}$, $f_n \in \mathbb{R}$, $\forall n$. On suppose que (f_n) est à bande limitée, c'est à dire $\hat{f}_k = 0$ pour $k \notin \{-N/2+1, \dots, N/2-1\}$. On note $(u_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ le sous échantillonnage de f_n soit $u_n = f_{Kn}$. On a alors pour tout $n \in \{0, \dots, KN-1\}$

$$f_n = \sum_{p=0}^{N-1} u_p \text{sinc}_{n-Kp}$$

où sinc est le sinus cardinal discret défini pour $m \in \{-KN/2+1, \dots, KN/2-1\}$ par

$$\text{sinc}_m = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{(N-1)\pi}{KN} m\right)}{\sin\left(\frac{\pi m}{KN}\right)}, & \text{si } m \neq 0, \\ \frac{N-1}{N}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce résultat indique que l'on peut reconstruire un signal à bande limitée à partir d'une version sous échantillonnée de ce signal.



4. Analyse temps-fréquence

La transformée de Fourier est obtenue en corrélant f avec une sinusoïde (complexe) $e^{-i\xi t}$. Comme le support de $e^{-i\xi t}$ couvre tout l'axe réel, $\hat{f}(\xi)$ dépend de f à tous les instants $t \in \mathbb{R}$ (et donc, y compris dans le futur pour un signal). On brasse donc toutes les informations et on oublie les propriétés locales. Ainsi, toute information temporelle est perdue (fréquence locale, ordre des notes dans un morceau de musique, ...).

On introduit donc dans ce chapitre des outils pour obtenir des informations à la fois en fréquence mais aussi en temps.

4.1 La transformée de Fourier à fenêtre

Si on veut des informations temporelles, il faut localiser la fonction de modulation $e^{-i\xi t}$. Pour cela, on utilise une fonction auxiliaire $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ localisée, symétrique (paire), normalisée $\|g\| = 1$ et qu'on va translater en temps (cf. l'effet d'une translation en temps sur des boîtes de Heisenberg). On remplace $e^{-i\xi t}$ dans la formule de la transformée de Fourier par l'atome temps-fréquence

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u)e^{i\xi t}, \quad u, \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Alors, on définit la transformée de Fourier à fenêtre par

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u)e^{-i\xi t} dt.$$

La transformée de Fourier à fenêtre dépend de deux paramètres qui engendrent une redondance d'informations : $\{g(u, \xi)\}$ est une famille redondante génératrice et constitue une frame de $L^2(\mathbb{R})$.

■ **Exemple 4.1** • $\mathbb{1}_{[-A/2, A/2]}(t)$ et $f(t)g(t - u) = f(t)\mathbb{1}_{[-A/2, A/2]}(t - u)$, alors

$$\begin{aligned} Sf(u, \xi) &= \mathcal{F}(f(t)g(t - u)) \\ &= \hat{f}(\xi) *_{\xi} \left(e^{-iu\xi} \hat{g}(\xi) \right) \\ &= \hat{f}(\xi) *_{\xi} \left(e^{-iu\xi} A \operatorname{sinc} \frac{A}{2} \xi \right). \end{aligned}$$

Plus A est petit (localisation fine en temps), plus on élargit le spectre (règle du principe d'incertitude d'Heisenberg).

- Fenêtre triangulaire $g(t) = \mathbb{1}_{[-A/2, A/2]} * \mathbb{1}_{[-A/2, A/2]}(t)$ et $\hat{g}(\xi) = A \operatorname{sinc}^2 \frac{A}{2} \xi$ donne une décroissance plus rapide en fréquence.
- Fenêtre de Hamming $g(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi t/T), & t \in [0, T] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
- Fenêtre de Hann $g(t) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi t/T), & t \in [0, T] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

■

Définition 4.1.1 Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ avec $\|g\| = 1$

i) On définit la transformée de Fourier à fenêtre par

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u, \xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t} dt.$$

ii) La densité d'énergie (spectrogramme) est donnée par $|Sf(u, \xi)|^2$.

Comme pour la transformée de Fourier, la question est de savoir si connaissant $Sf(u, \xi)$, $(u, \xi) \in \mathbb{R}^2$, on peut reconstruire f alors que la famille $\{g(u, \xi)\}$ engendre une frame (redundance).

Formule de Gabor La reconstruction est possible sous condition d'admissibilité : g doit être paire, $\|g\| = 1$.

Théorème 4.1.1 Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors

- i) $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi)g(t-u)e^{i\xi t} dud\xi$
- ii) Plancherel généralisé $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 dud\xi$.

Preuve

i) Par Parseval,

$$\int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t-u)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{Sf(\cdot, \xi)}(\omega) \overline{\widehat{g(t-\cdot)}}(\omega) d\omega.$$

Calculons les deux transformées de Fourier apparaissant dans la formule précédente. D'une part, nous trouvons

$$\begin{aligned} \widehat{Sf(\cdot, \xi)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega u} Sf(u, \xi) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega u} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t} dt du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega u} e^{-i\xi u} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi(t-u)} dt du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega+\xi)u} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(u-t)e^{i\xi(u-t)} dt du, \quad \text{par symétrie de } g \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega+\xi)u} \left(f * \left(g(\cdot)e^{i\xi\cdot} \right) \right) (u) du \\ &= \hat{f}(\omega + \xi) \widehat{g(\cdot)e^{i\xi\cdot}}(\omega + \xi) \\ &= \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

D'autre part, par parité de g et par changement de variables $s = u - t$

$$\widehat{g(t - \cdot)}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega u} g(u - t) du = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(t+s)} g(s) ds = e^{-i\omega t} \hat{g}(\omega).$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t - u)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega) e^{i\omega t} \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t - u)} du e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 e^{i(\xi + \omega)t} d\omega d\xi.$$

Si $\hat{f} \in L^1$, $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) e^{i(\omega + \xi)t} d\xi$ (il suffit de poser $\zeta = \omega + \xi$). Ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t - u)} du e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = f(t) \|g\|_{L^2}^2 = f(t).$$

Si $f \notin L^1$, on fait par densité comme dans le cas de la transformée de Fourier sur L^2 .

ii) Par la formule de Plancherel, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 du d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{Sf}(\cdot, \xi)|^2 d\omega d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega + \xi)|^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(s)|^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega ds \\ &= \|f\|_{L^2}^2 \|\hat{g}\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 2\pi \underbrace{\|g\|_{L^2}^2}_1. \end{aligned}$$

■

La formule de reconstruction peut se réécrire

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle f, g_{u, \xi} \rangle g_{u, \xi} d\xi du.$$

Cela ressemble à une décomposition sur une base orthogonale. Cependant, ce n'est pas le cas car la famille $\{g(u, \xi)\}$ est largement redondante dans $L^2(\mathbb{R})$ et constitue une frame : on a une redondance d'informations.

La conservation de l'énergie $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 du d\xi$ montre que $Sf \in L^2(\mathbb{R})$.

Mais à cause de la redondance de la représentation, toute fonction $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ne peut pas s'écrire comme la transformée de Fourier à fenêtre d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$: tous les éléments de $L^2(\mathbb{R}^2)$ n'ont pas nécessairement un antécédent par la transformée de Fourier à fenêtre d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, l'application Sf n'est donc pas surjective. En revanche, l'application $S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ est injective.

La proposition suivante donne les contraintes pour être dans l'image $S(L^2(\mathbb{R}))$ de S .

Proposition 4.1.2 $\exists f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\phi = Sf \iff$

$$\phi(u_0, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(u, \xi) K(u_0, u, \xi_0, \xi) du d\xi$$

où $K(u_0, u, \xi_0, \xi) = \langle g_{u,\xi}, g_{u_0,\xi_0} \rangle$.

Le terme $K(u_0, u, \xi_0, \xi)$ s'appelle noyau reproduisant et mesure la corrélation de deux atomes temps-fréquence soit encore leur recouvrement.

La transformée de Fourier à fenêtre discrète On considère un signal f discret périodique de période N et on note $f[n]$ les éléments du signal. La fenêtre est aussi une suite $g[n]$ symétrique, périodique de période N , $\|g\| = 1$. Soit $g_{m,l}[n] = g[m-n]e^{i\frac{2\pi}{N}ln}$ l'atome discret dont la DFT est

$$\text{DFT}(g_{m,l})[k] = \hat{g}_{m,l}[k] = \hat{g}[k-l]e^{-i\frac{2\pi}{N}m(k-l)}.$$

Alors, la transformée de Fourier à fenêtre discrète (WDFT) de f est

$$\begin{aligned} Sf[m, l] &= \langle f, g_{m,l} \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n]g[n-m]e^{-i\frac{2\pi}{N}ln} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} f[p+m]g[p]e^{-i\frac{2\pi}{N}l(p+m)} \end{aligned}$$

la dernière égalité ayant été obtenue en faisant le changement de variable $p = n - m$ et en se rappelant que la somme ne dépend pas de l'intervalle de longueur N sur lequel on se place.

Ainsi, pour chaque $0 \leq m < N$, $Sf[m, l]$ est calculée pour $0 \leq l < N$ avec des DFT de $f[n]g[n-m]$ soit N FFT de taille N ce qui engendre un coût de $\mathcal{O}(N^2 \log N)$.

La transformation inverse suit un procédé identique

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} Sf[m, l]g[n-m]e^{i\frac{2\pi}{N}ln} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g[n-m] \sum_{l=0}^{N-1} Sf[m, l]e^{i\frac{2\pi}{N}ln}$$

ce qui nécessite N FFT et un coût similaire à la WDFT.

Une des limitations de la transformée de Fourier à fenêtre est que l'on ne peut pas traiter des signaux transitoires. Pour ce genre de signaux, il serait nécessaire d'avoir des fenêtres dont la taille peut varier, sinon, si le signal contient des détails dont la taille est très inférieure à celle de la fenêtre, alors on retombe sur la limitation de la transformée de Fourier usuelle (comme si il n'y avait pas de fenêtre), et dans le cas opposé (taille des détails très grands par rapport à celle de la fenêtre), alors, les détails ne sont pas détectés.

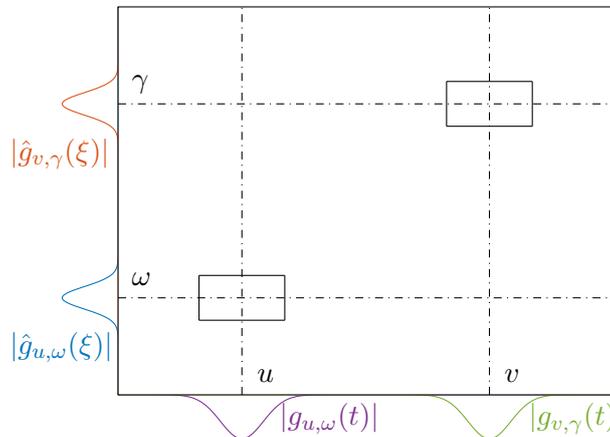


FIGURE 4.1 – Boîtes de Heisenberg pour les atomes de la transformée de Fourier à fenêtre

On va alors chercher une décomposition à base d'atomes temps-fréquence

$$\{\phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}, \quad \phi_\gamma \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\phi_\gamma\| = 1, \quad \text{et } Tf(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi_\gamma}(t) dt = \langle f, \phi_\gamma \rangle.$$

Dans les cas favorables, on a une formule de reconstruction.

Cette écriture englobe la transformée de Fourier où les atomes $\phi_\gamma = e^{i\xi t}$ ne sont localisés qu'en fréquence et la transformée de Fourier à fenêtre où $\phi_\gamma = g_{u,\xi}$.

On cherche donc des ϕ_γ qui permettent une bonne localisation fréquentielle et une bonne localisation temporelle (spatiale) qui s'adapte. C'est l'objet du paragraphe suivant.

4.2 La transformée en ondelettes

L'idée est d'introduire un facteur d'échelle pour avoir une variabilité sur la taille de la fenêtre en temps par changement d'échelle ce qui aura un effet immédiat sur la taille de l'analyse en fréquence.

On choisit ainsi un profil (comme g dans la transformée de Fourier à fenêtre) $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ avec la propriété d'être à masse nulle $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ (propriété qui joue un rôle similaire à celle de la symétrie pour g), normalisée $\|\psi\| = 1$ et centrée en 0. On construit la famille d'atomes temps-fréquence en dilatant ψ , appelée ondelette, par un facteur s et en la translatant de u

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

ce qui assure que $\|\psi_{u,s}\| = 1$. La transformée en ondelettes est définie par

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \tag{4.1}$$

Le W de $Wf(u, s)$ désigne *Wavelet* (ondelette en anglais). La position de l'ondelette est déterminée par u et s donne son échelle et caractérise l'inverse de la fréquence. En effet, l'effet de la dilatation sur des fonctions et le lien avec la fréquence est décrit sur la figure suivante.

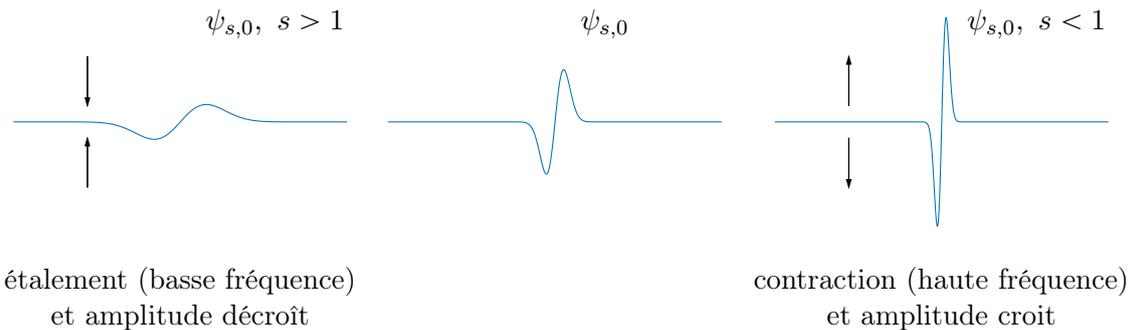


FIGURE 4.2 – Effet de la dilatation sur ψ

La définition de transformée en ondelette (4.1) est similaire à celle de la transformée de Fourier avec une fenêtre qui serait dilatée ou contractée. Les $\psi_{u,s}$ ont donc un support en fréquence ou en temps qui varie avec s .



1. On demande que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$, ainsi ψ doit osciller pour autant de parties positives que négatives pour annuler l'intégrale. ψ a donc la forme d'une onde d'où le nom d'ondelette.

2. La transformée de Fourier de ψ est $\hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} \psi(t) dt$ et donc $\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$. Comme $\psi \in L^2$, $\hat{\psi} \in L^2$ et on a, si ψ est continue, $\lim_{u \rightarrow 0} \hat{\psi}(u) = 0$. En outre, comme $\hat{\psi} \in L^2$, $\hat{\psi}$ décroît à l'infini et le graphe de $\hat{\psi}$ prend la forme indiquée sur la figure 4.3

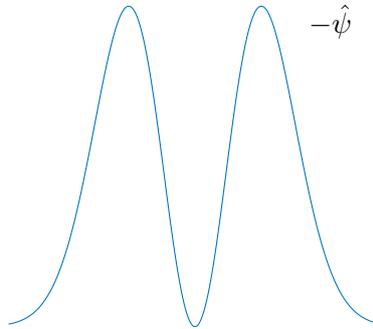


FIGURE 4.3 – Transformée de Fourier typique d'une ondelette

3. $Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\psi} \left(\frac{t-u}{s} \right) dt = f * \tilde{\psi}_s(u)$ où $\tilde{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\psi} \left(-\frac{t}{s} \right)$.
 Mais, $\hat{\tilde{\psi}}(\xi) = \sqrt{s} \hat{\psi}(s\xi)$. On peut donc interpréter $\hat{\psi}$ comme la fonction de transfert associée au filtrage de f par $\tilde{\psi}_s$.
 Mais comme $\hat{\psi}$ a une forme particulière d'être localisée sur deux bande de fréquence (voir figure 4.3), on dit que la transformée en ondelette est une filtrage par filtre passe bande.

4.2.1 Ondelettes continues

Comme pour la transformée de Fourier à fenêtre, on peut se poser les questions :

- quand est ce que Wf est inversible soit encore peut on reconstruire f à partir de Wf ?
- quelle est l'image de l'application Wf ?

Pour répondre à ces questions, supposons tout d'abord que ψ soit réelle. La réponse à la première question nécessite une condition d'admissibilité car comme pour la transformée de Fourier à fenêtre, on a une famille $\{\psi_{u,s}\}$ redondante qui constitue une frame.

Théorème 4.2.1 — Calderón, Grossmann & Morlet. Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction réelle qui vérifie la condition d'admissibilité

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < +\infty.$$

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ vérifie

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} Wf(u, s) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right)}_{\psi_{u,s}} du \frac{ds}{s^2}$$

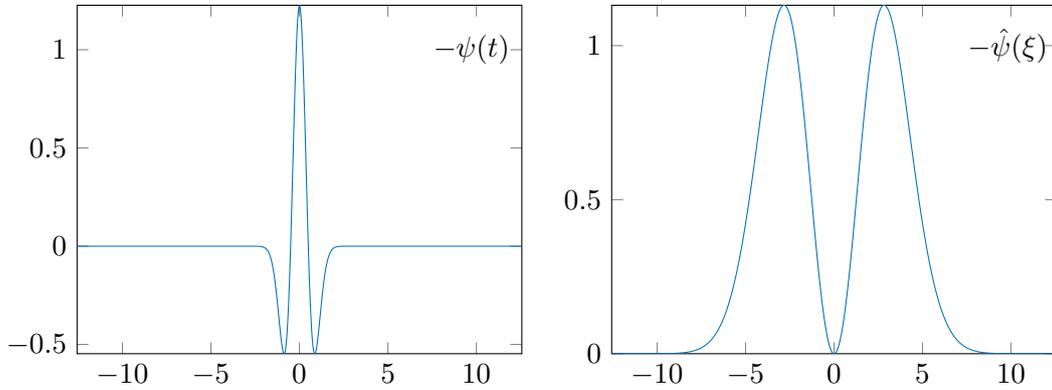
et

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |Wf(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2}.$$

Pour que l'intégrale apparaissant dans la condition d'admissibilité ne soit pas divergente, il faut que $\hat{\psi}(0) = 0$ qui est une des conditions pour définir une ondelette.

■ **Exemple 4.2 — Ondelette réelle.** Un exemple typique d'ondelette réelle est donné par la dérivée seconde d'une gaussienne aussi connu comme le chapeau mexicain

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{et} \quad \hat{\psi}(\xi) = \frac{-\sqrt{8}\sigma^{5/2}\pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \xi^2 e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}.$$



■

■ **Exemple 4.3 — Ondelette analytique.** On peut également localiser seulement en fréquence positive, auquel cas on construit une ondelette analytique (fonction dont la transformée de Fourier est nulle pour $\xi < 0$). Pour cela, on fait le produit d'une fonction réelle et symétrique et d'une sinusoïde $\psi(t) = e^{i\eta t}g(t)$ ce qui revient en fréquence à avoir $\hat{\psi}(\xi) = \hat{g}(\xi - \eta)$. On remarque donc que cela revient à avoir une fenêtre modulée. Si on choisit g telle que $\hat{g}(\xi) = 0$ pour $|\xi| > \eta$, alors $\psi(\xi) = 0, \forall \xi < 0$.

Suivant cette idée, on définit l'ondelette de Gabor $g(t) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$. Sa transformée de Fourier est $\hat{g}(\xi) = (4\pi\sigma^2)^{1/4}e^{-\sigma^2\xi^2/2}$. Si $\sigma^2\eta^2 \gg 1$, alors $\hat{g}(\xi) \approx 0$ pour $|\xi| > \eta$. L'ondelette de Gabor est approximativement analytique.

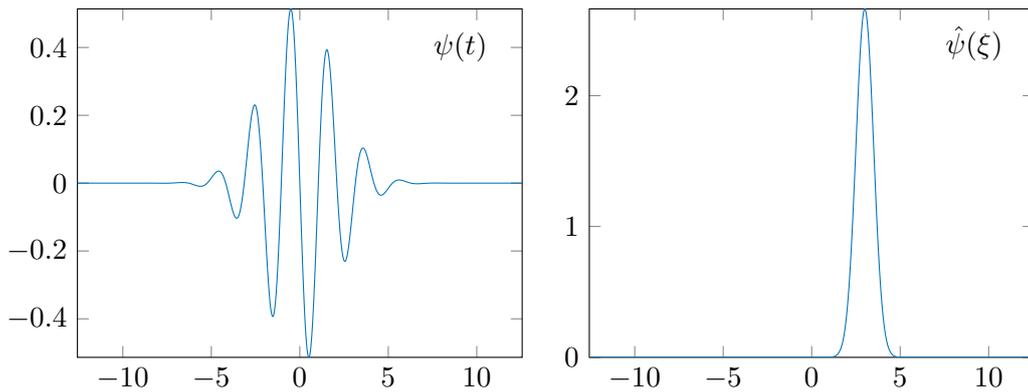


FIGURE 4.4 – Ondelette de Gabor pour $\sigma = 2$ et $\eta = 3$

■

Résolution temps fréquence Soit ψ un ondelette continue. Supposons là centrée, c'est à dire $\int_{\mathbb{R}} t|\psi(t)|^2 dt = 0$ et définissons sa variance $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2|\psi(t)|^2 dt$. Alors, $\psi_{u,s}(t)$ est centrée en $u \in \mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} (t - u)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t - u}{s} \right) \right|^2 dt = s^2 \sigma^2 := \tilde{\sigma}_t^2.$$

Soit $\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$ (si ψ est analytique, alors $\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$) la moyenne en fréquence et $\sigma_\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} (\xi - \eta)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$ (l'intégrale étant limitée à $[0, +\infty[$ pour une ondelette analytique). La transformée de Fourier de $\psi_{u,s}$ est une dilatation de $\hat{\psi}$ par $1/s$

$$\widehat{\psi_{u,s}}(\xi) = \sqrt{s} \hat{\psi}(s\xi) e^{-i\xi u}.$$

Sa moyenne est donc η/s et on a

$$\int_{\mathbb{R}} (\xi - \frac{\eta}{s})^2 s |\hat{\psi}(s\xi)|^2 d\xi = \frac{\sigma_\xi^2}{s^2} := \tilde{\sigma}_\xi^2.$$

Donc, $\tilde{\sigma}_t^2 \tilde{\sigma}_\xi^2 = \sigma_t^2 \sigma_\xi^2$ est constant. Donc, l'étalement énergétique de l'atome $\psi_{u,s}$ correspond à une boîte de Heisenberg centrée en $(u, \eta/s)$ de paramètre $s\sigma_t \times \frac{\sigma_\xi}{s}$ (voir Figure 4.5).

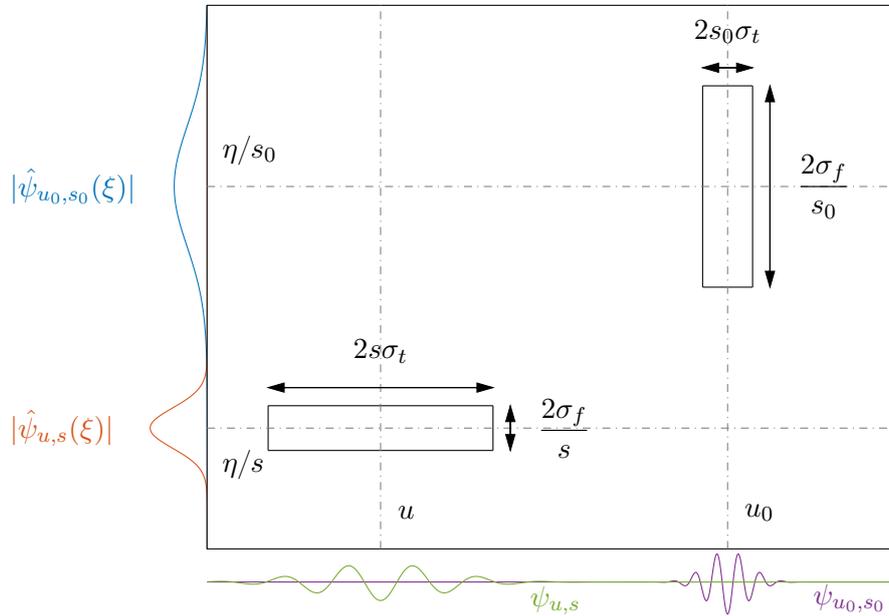


FIGURE 4.5 – Boîtes de Heisenberg pour l'ondelette de Gabor

On voit donc sur la figure 4.5 que

- pour s grand (basse fréquence) : faible résolution spatiale mais bonne résolution fréquentielle,
- pour s petit (haute fréquence) : bonne résolution spatiale mais faible résolution fréquentielle.

Les basses fréquences sont donc moins bien localisées en temps au contraire des hautes fréquences.

On définit $P_{Wf}(u, \omega)$ la densité d'énergie locale de f dans la boîte de Heisenberg ($\omega = \eta/s$) centrée en (u, ω) par

$$P_{Wf}(u, \omega) = |Wf(u, s)|^2 = |Wf(u, \frac{\eta}{\omega})|^2.$$

On appelle la donnée de P_{Wf} pour tout (u, ω) un scalogramme.

Comme pour les transformées de Fourier et de Fourier à fenêtre, il est possible d'écrire une transformée en ondelette discrète à base de DFT. Cependant, nous préférons examiner la notion de base d'ondelettes et nous consacrer ultérieurement aux ondelettes discrètes.

4.2.2 Transformations dyadiques

On veut construire des ondelettes ψ qui génèrent des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ par translation et dilatation (on dispose pour l’instant de frames). Avec les ondelettes continues, on sait qu’il va y avoir redondance d’informations, les supports des ondelettes se chevauchant. On veut donc éviter la redondance inhérente à la formule

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{Wf(u, s)}{s^2} \psi_{u,s} du ds.$$

Une idée est d’utiliser un pavage échelle-temps $(s, k) = (B^{-j}, B^{-j}k)$ (qui correspondant en fréquence-temps à $(\xi, k) = (B^j, B^{-j}k)$) discret disjoint. Souvent, $B = 2$ (on parle alors de transformation dyadique) et chaque fonction $\psi_{j,k}(t)$ est caractérisée par sa largeur (échelle) 2^{-j} et sa position k . On a vu sur la figure 4.5 la représentation des boîtes de Heisenberg dans le plan temps-fréquence. Celle-ci se transforme en le pavage échelle-temps de la figure 4.6.

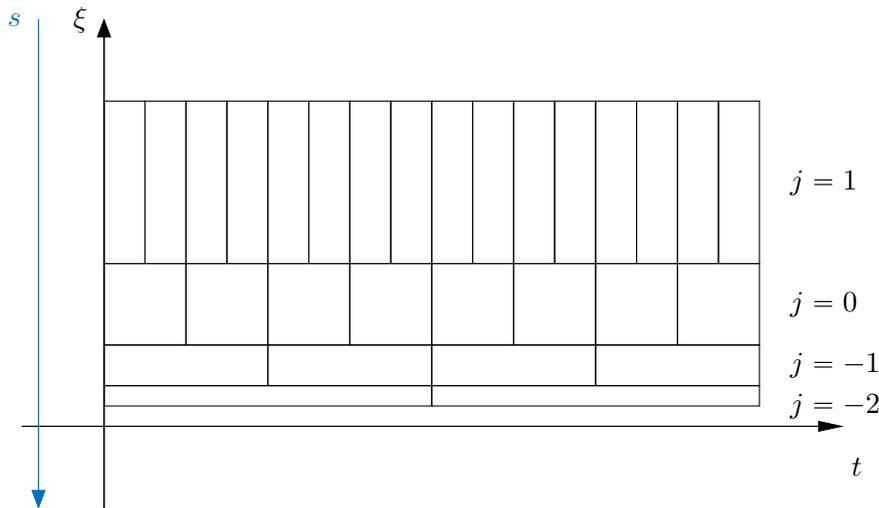


FIGURE 4.6 – Pavage échelle-temps

A j fixé, les supports des $\psi_{j,k}(t)$ sont disjoints et contigus (pavés de la figure 4.6). On définit alors

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k) = 2^{j/2} \psi(2^j(t - 2^{-j}k)), \quad j \in \mathbb{Z},$$

formule qu’il faut comparer à $\psi_{u,s} = \psi((t - u)/s)/\sqrt{s}$, s étant assimilable à $s = 2^{-j}$.

Les fonctions de base $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ sont ainsi dénombrables et générées par dilatations et translations dyadiques. On a ainsi réduit la redondance de la transformée continue et on peut reconstruire le signal

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} \right) \psi_{j,k}(t).$$

Ceci conduit à l’idée de faire des approximations successives à des résolutions de plus en plus fine sur des échelles dyadiques, ce qui conduit à la notion d’approximation multirésolution qui est un formalisme général pour construire des bases d’ondelettes.

4.2.3 Analyse multirésolution

Définition 4.2.1 Une famille de sous espaces $V_j \subseteq L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, constitue une approximation multirésolution (AMR) si les 6 propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $f \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$

2. $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$
3. $f \in V_j \iff f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j, \forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2$
4. $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$
5. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
6. $\exists \theta \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\{\theta(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de V_0

Interprétation

1. V_{j+1} est l'image de V_j par une contraction d'un facteur 2.
2. $\forall j, V_j$ est un sous espace de V_{j+1} (structure de boîtes emboîtées) : un signal basse résolution est aussi un signal haute résolution.
3. V_j est invariant par translations de 2^{-j} .
4. L'intersection des V_j est réduite à 0 dans L^2 : à la résolution minimale, on perd toute l'image. Plus j diminue, plus l'approximation est grossière.
5. La réunion des V_j est dense dans L^2 : à résolution infinie, on reproduit parfaitement tous les signaux. Plus j augmente, plus l'approximation est fine.
6. Les translations entières de θ forment une base de Riesz (base non nécessairement orthonormée mais pouvant être « oblique ») de V_0 : chaque résolution est engendrée par une base d'atomes translatés de 2^{-j} . Comme on a une base de V_0 , on a une base de tous les V_j .

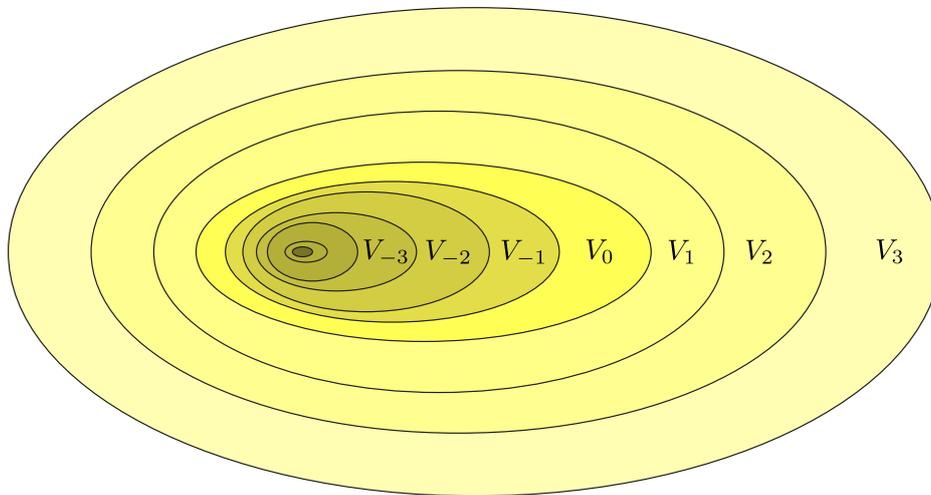


FIGURE 4.7 – Espaces emboîtés

On peut s'assurer que $\{\theta(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz de V_0 et on peut la transformer en base orthonormée par la proposition suivante.

Proposition 4.2.2 Soit $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ et $\{\tau_k \theta, k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des translations de θ .

- La famille $\{\tau_k \theta\}$ est une base de Riesz de $V_0 = \text{Vect}\{\tau_k \theta\}$ (espace vectoriel engendré par les translations de θ) si et seulement si $\exists 0 < A \leq B < +\infty$ telles que $A \leq k(\xi) \leq$

B où $k(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\xi + 2k\pi)|^2$.

- Si on définit la fonction φ par

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{\theta}(\xi)}{\sqrt{k(\xi)}}$$

alors les $\{\tau_k \varphi\}$ forment une base orthonormée de V_0 .

R Dans la suite, on ne va plus travailler qu'avec des bases d'ondelettes orthonormées. L'orthogonalité des bases est une contrainte très forte en dimension infinie. On préfère souvent simplement conserver la propriété de base de Riesz qui est plus souple. Si on ne fait pas ce choix, on verra apparaître des ondelettes biorthogonales avec deux filtres miroirs (voir suite pour la notion de filtre miroir).

On pose

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) = 2^{j/2} \varphi(2^j(t - 2^{-j}k)).$$

Alors, la famille des $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j , $j \in \mathbb{Z}$. On appelle les $\varphi_{j,k}$ les fonctions d'échelle.

La projection orthogonale de f sur V_j s'obtient par la décomposition sur la base orthonormée des fonctions d'échelle

$$P_{V_j} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(t).$$

L'idée fondamentale de l'AMR est que comme $V_j \subset V_{j+1}$, il existe un sous espace $W_j \subset V_{j+1}$ tel que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

V_{j+1} est donc la somme directe des deux sous espaces V_j et W_j : W_j est le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} . Donc, $u \in V_{j+1}$ se décompose de manière unique comme somme de $v \in V_j$ et $w \in W_j$ et on a $\langle v, w \rangle = 0$. La projection orthogonale d'une fonction f s'obtient alors par

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f,$$

la projection $P_{W_j} f$ fournissant les détails de f qui existe à l'échelle $2^{-(j+1)}$ et qui sont absents à l'échelle plus grossière 2^{-j} .

On a à nouveau que les espaces W_j sont invariants par translation, c'est à dire

$$f \in W_j \iff f(\cdot - 2^{-j}k) \in W_j, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Les espaces W_j disposent encore d'un autre atout : il est possible de construire une base orthonormée de W_j $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ à partir d'une fonction mère ψ (construite à partir de φ) qu'on appelle ondelette. Ainsi, $\{\varphi_{j,k}\} \cup \{\psi_{j,k}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, forme une base orthonormée de V_{j+1} .

On peut itérer le processus qui a abouti à la définition de W_j et on a

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \\ &= V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j \\ &= \dots \\ &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{j-1} \oplus W_j \\ &= \bigoplus_{\ell=-\infty}^j W_\ell \end{aligned}$$

et on a donc $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{\infty} W_\ell$ et on peut ainsi écrire

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} \psi_{j,k}(t).$$

■ **Exemple 4.4 — Approximation constante par morceaux.** Soit

$$V_j = \{g \in L^2(\mathbb{R}) \mid g(t) \text{ constante pour } t \in 2^{-j}[n, n+1[, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ainsi, l'espace V_0 contient des fonctions g constantes sur les intervalles de longueur unité $[n, n+1[, n \in \mathbb{Z}$. Ces intervalles sont engendrés par la cellule de base $[0, 1[$. On construit $\theta = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $\{\theta(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de V_0 (inutile de passer ici par l'orthonormalisation d'une base de Riesz) et on a donc $\varphi(t) = \theta(t)$.

Comme $V_0 \subset V_1$ et que $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$ forme une base orthonormée de V_j , on a

$$\varphi_{0,0}(t) (= \varphi(t)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_k \varphi(2t - k).$$

Comme φ est à support compact sur $[0, 1[$, la somme infinie se simplifie et on a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2t - 1) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,0}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,1}(t) \end{aligned}$$

d'où $h_k = 2^{-1/2}$ si $k = 0, 1$ et 0 sinon.

Une ondelette mère peut être construite par

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{1,0}(t) - \varphi_{1,1}(t))$$

qui est l'ondelette de Haar. Le problème de cette AMR est son manque de régularité. ■

Tout AMR repose sur la détermination de φ . Cherchons à réduire possibilités. Comme $V_0 \subset V_1$, on a vu que

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_k \varphi(2t - k)$$

avec

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(2t - k)} dt.$$

On peut encore réécrire φ par

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_k \varphi(t - k), \quad (4.2)$$

h constituant donc un filtre discret.

Ⓡ Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, si φ est à support compact, h_k a un nombre fini de composantes non nulles.

Prenons la transformée de Fourier de l'équation (4.2). Comme on a une convolution, elle se transforme en produit

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\xi) \hat{\varphi}(\xi), \quad \text{avec } \hat{h}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi}. \quad (4.3)$$

En effet, on représente la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par une distribution $h(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \delta_n(t)$ et comme $\hat{\delta}_n(\xi) = e^{-in\xi}$, on obtient $\hat{h}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi}$.

En changeant de variables dans la relation (4.3), on obtient

$$\hat{\varphi}(2^{-p+1}\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(2^{-p}\xi) \hat{\varphi}(2^{-p}\xi), \quad \forall p \geq 0.$$

Pour $p = 1$,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\xi}{2}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\xi}{4}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

et en continuant de substituer, on arrive à

$$\hat{\varphi}(\xi) = \left(\prod_{p=1}^P \frac{\hat{h}(2^{-p}\xi)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\varphi}(2^{-P}\xi).$$

Si $\hat{\varphi}(\xi)$ est continue en $\xi = 0$, alors $\lim_{P \rightarrow +\infty} \hat{\varphi}(2^{-P}\xi) = \hat{\varphi}(0)$ d'où

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\xi)}{\sqrt{2}} \hat{\varphi}(0).$$

Il faut s'assurer que ce produit infini $\prod_{p=1}^{+\infty}$ conduise à ce que cette formule soit bien la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle. On a pour cela le théorème

Théorème 4.2.3 — Mallat, Meyer 89. Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une fonction d'échelle. Alors, la série de Fourier $\hat{h}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi}$ où $h_n = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi(2t - k) dt$ vérifie

$$\hat{h}(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad |\hat{h}(\xi)|^2 + |\hat{h}(\xi + \pi)|^2 = 2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Réciproquement, si $\hat{h}(\xi)$ est 2π -périodique, vérifiant (4.4) et $\hat{h} \in C^1([-\varepsilon, \varepsilon])$ pour un $\varepsilon > 0$ (autrement dit C^1 dans un voisinage de 0) et si $\int_{\xi \in]-\pi/2, \pi/2[} |\hat{h}(\xi)| > 0$, alors

$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\xi)}{\sqrt{2}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$.

R Comme $|\hat{h}(\xi)|^2 + |\hat{h}(\xi + \pi)|^2 = 2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$, pour $\xi = 0$, on obtient $\hat{h}(\pi) = 0$ et donc h est un filtre passe-bas.

Le filtre discret (h_k) est appelé filtre miroir conjugué. Il permet de construire φ à partir de $\hat{\varphi}(0)$. Il permet aussi de déterminer les ondelettes (base de W_j). On cherche donc une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{Vect}\{\psi_{j,k}\} = W_j \quad \text{et} \quad \langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{k,k'}$$

où $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$.

Comme $V_1 = V_0 \oplus W_0$, $\psi \in V_1$ et on peut la représenter dans la base de V_1

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2t - k), \quad g_k = \langle \psi, \varphi_{1,k} \rangle = \sqrt{2} \langle \psi, \varphi(2 \cdot -k) \rangle.$$

Par les mêmes arguments que précédemment,

$$\hat{\psi}(2\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad \text{avec } \hat{g}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{-in\xi}.$$

Théorème 4.2.4 Soit φ une fonction d'échelle et h son filtre miroir conjugué. Soit ψ la fonction dont la transformée de Fourier vaut

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

avec $\hat{g}(\xi) = 2^{-i\xi}\overline{\hat{h}(\xi + \pi)}$. Alors, la famille $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de W_j et la famille $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ une base orthonormée de L^2 .

- R** Les relations définissant h implique $|\hat{g}(\xi)|^2 + |\hat{g}(\xi + \pi)|^2 = 2$ et $\hat{g}(\xi)\overline{\hat{h}(\xi)} + \hat{g}(\xi + \pi)\overline{\hat{h}(\xi + \pi)} = 0$. On a donc $\hat{g}(0) = \overline{\hat{h}(\pi)} = 0$ et $|\hat{g}(0)|^2 + |\hat{g}(\pi)|^2 = 2$ implique $|\hat{g}(\pi)|^2 = 2$. g est ainsi un filtre passe-haut.

Comme on a $\hat{g}(\xi) = 2^{-i\xi}\overline{\hat{h}(\xi + \pi)}$, qui constitue la série de Fourier associée à $(g_k)_k$, on obtient l'égalité fondamentale pour la construction d'algorithmes efficaces

$$g_k = (-1)^{1-k}h_{1-k}.$$

Connaissant le filtre miroir conjugué $\hat{h}(\xi)$, on peut donc construire φ et ψ et donc toute la base d'ondelettes.

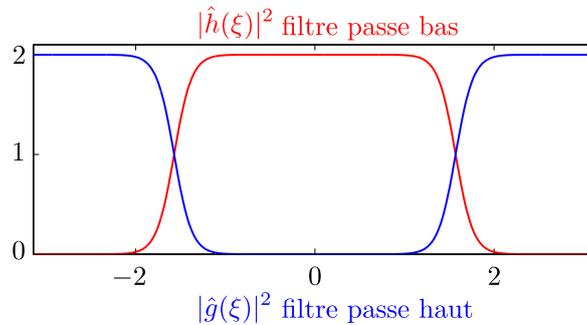


FIGURE 4.8 – Filtres miroirs

On a vu que si l'on veut réduire le nombre d'éléments non nuls du filtre $(h_p)_p$ (et par suite de $(g_p)_p$), il faut avoir φ à support compact. En fait, on a l'équivalence « φ à support compact » et « filtre miroir conjugué $(h_p)_p$ à support compact » c'est à dire $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$\hat{h}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-ik\xi}$. Les filtres à support compact ont été calculés par I. Daubechies. Elle les a construits en demandant de plus m moments nuls

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m,$$

soit que ψ soit orthogonale à tous les polynômes de degré inférieur ou égal à m .

L'intérêt des moments nuls est que ceci est équivalent à ce que la fonction d'échelle φ restitue les polynômes de degré inférieur ou égal à m , ce qui pour une AMR indique sa capacité

à restituer des signaux réguliers. Pour les ondelettes, la propriété de moments nuls permet de caractériser une propriété duale c'est à dire l'ordre des singularités d'un signal.

■ **Exemple 4.5** Les coefficients pour l'ondelette de Daubechies D_4 sont donnés par

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Les filtres pour la fonction d'échelle et l'ondelette mère sont respectivement

$$(h_0, h_1, h_2, h_3) \quad \text{et} \quad (g_0, g_1, g_2, g_3) = (h_3, -h_2, h_1, -h_0).$$

■

4.2.4 Transformée en ondelettes rapide

Une transformée en ondelettes rapide décompose successivement chaque approximation $P_{V_{j+1}}f$ en une approximation plus grossière P_{V_j} et en coefficients d'ondelettes correspondant $P_{W_j}f$. A la reconstruction, chaque $P_{V_{j+1}}f$ est calculé à partir de P_{V_j} et de $P_{W_j}f$.

Comme $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $f \in V_{j+1}$ est représenté

- soit par $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle \varphi_{j+1,k} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}$
- soit par

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle \varphi_{j+1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j+1,k} \rangle \psi_{j+1,k} \\ &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \varphi_{j+1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j+1,k} \psi_{j+1,k} \end{aligned}$$

Comme $V_j \subset V_{j+1}$, on peut décomposer les $\varphi_{j,n}$ dans la base des $\varphi_{j+1,n}$ et on a

$$\varphi_{j,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle \varphi_{j+1,k},$$

ce qui conduit à

$$a_{j,n} = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle.$$

Par définition,

$$\langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} \varphi(2^j t - n) 2^{(j+1)/2} \overline{\varphi}(2^{j+1} t - k) dt.$$

On pose $x = 2^j t - n$ d'où $2^{-j} dx = dt$ et

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle &= 2^j 2^{1/2} 2^{-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi}(2x - k + 2n) dx \\ &= \langle \varphi(t), \sqrt{2} \overline{\varphi}(2t - k + 2n) \rangle \\ &= h_{k-2n} \text{ par définition des } h_k. \end{aligned}$$

On en conclut donc que $a_{j,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} a_{j+1,k}$ autrement dit

$$a_{j,n} = (a_{j+1, \cdot} * \overline{h})_{2n} \tag{4.5}$$

où on note $\overline{x}_n = x_{-n}$.

Pour les mêmes raisons,

$$\psi_{j,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle \varphi_{j+1,k},$$

et

$$d_{j,n} = \langle f, \psi_{j,n} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle \langle \psi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} \psi(2^j t - n) 2^{(j+1)/2} \overline{\varphi}(2^{j+1} t - k) dt \\ &= \langle \psi(t), \sqrt{2} \varphi(2t - k + 2n) \rangle \\ &= g_{k-2n} \text{ par définition des } h_k. \end{aligned}$$

On a donc

$$d_{j,n} = (a_{j+1, \cdot} * \bar{g})_{2n} \quad (4.6)$$

On calcule donc les coefficients $(a_{j,n})_n$ et $(d_{j,n})_n$ par des convolutions discrètes et un sous échantillonnage (un échantillon sur deux).

Grâce à ces formules, on peut reconstruire l'approximation $P_{V_{j+1}}$ par

$$\varphi_{j+1,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,n}, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,n}, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

$$\begin{array}{ccc} & \parallel & \\ & h_{k-2n} & \\ & \parallel & \\ & & g_{k-2n} \end{array}$$

et donc

$$\varphi_{j+1,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \varphi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \psi_{j,k}.$$

En prenant le produit scalaire de cette égalité avec f , ceci conduit à

$$a_{j+1,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} a_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} d_{j,k},$$

ce que l'on note encore

$$a_{j+1,n} = (\tilde{a}_{j, \cdot} * h)_n + (\tilde{d}_{j, \cdot} * h)_n$$

où l'opération

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} x_p & \text{pour } n = 2p \\ 0 & \text{pour } n = 2p + 1 \end{cases}$$

désigne le sur échantillonnage de rapport 2.

On résume tous ces résultats dans le théorème

Théorème 4.2.5 A la décomposition

$$a_{j,n} = (a_{j+1, \cdot} * \bar{h})_{2n} \quad \text{et} \quad d_{j,n} = (a_{j+1, \cdot} * \bar{g})_{2n}.$$

A la reconstruction

$$a_{j+1,n} = (\tilde{a}_{j, \cdot} * h)_n + (\tilde{d}_{j, \cdot} * h)_n$$

On a ainsi le tableau

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow a_{j,n} & \\ a_{j+1,n} & & a_{j,n} \searrow \\ & \searrow d_{j,n} & \\ & & \nearrow a_{j+1,n} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & \searrow a_{j,n} & \\ a_{j+1,n} & & a_{j,n} \nearrow \\ & \nearrow d_{j,n} & \\ & & \searrow a_{j+1,n} \end{array}$$

Interprétation

- Dans le calcul $a_{j,n} = (a_{j+1,\cdot} * \bar{h})_{2n}$, \bar{h} enlève les hautes fréquences (filtre passe bas)
- Dans le calcul $d_{j,n} = (a_{j+1,\cdot} * \bar{g})_{2n}$, \bar{g} est un filtre passe haut : on récupère les hautes fréquences de la suite des produits scalaires $(a_{j+1,k})_k$.
- La formule de reconstruction $a_{j+1,n} = (\widetilde{a}_{j,\cdot} * h)_n + (\widetilde{d}_{j,\cdot} * h)_n$ réalise une interpolation qui insère des 0 dans les suites $(a_{j,n})_n$ et $(d_{j,n})_n$ pour doubler leur longueur, puis les filtres.

On peut bien entendu itérer le processus.

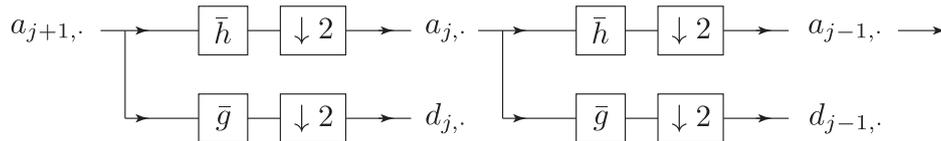


FIGURE 4.9 – Décomposition (A)

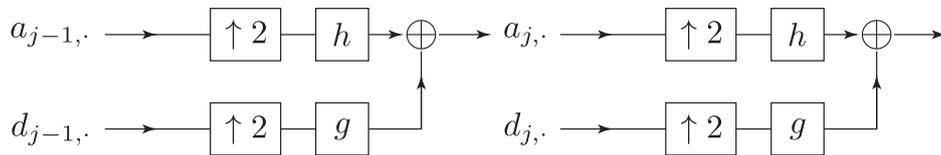


FIGURE 4.10 – Reconstruction (B)

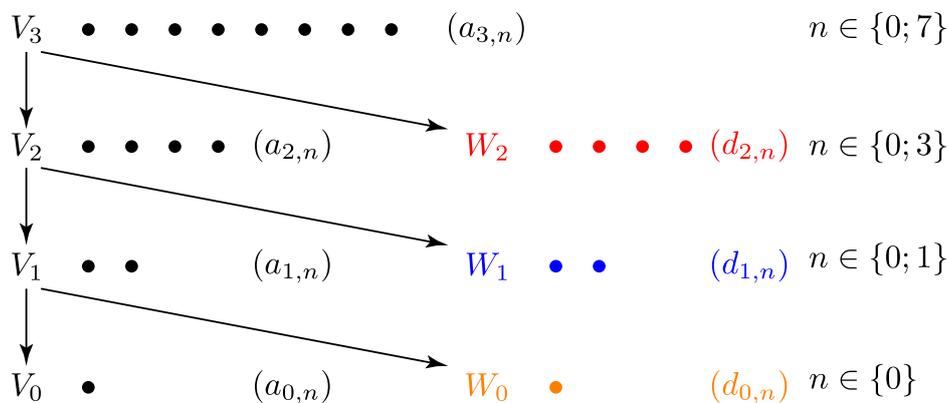
A la sortie de (A), on a la suite $(a_{0,\cdot}; d_{0,\cdot}; d_{1,\cdot}; \dots; d_{j,\cdot})$. La transformation

$$a_{j+1,\cdot} \longrightarrow (a_{0,\cdot}; d_{0,\cdot}; d_{1,\cdot}; \dots; d_{j,\cdot})$$

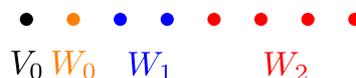
s'appelle **transformation en ondelettes discrète**. On peut reconstruire à partir de (B) de manière exacte.

En pratique, les signaux sont finis et on a $(a_{j+1,n})_n$ 2^{j+1} -périodique ce qui veut dire qu'on a $N = 2^{j+1}$ coefficients et $(a_{j+1,n})_n \in V_{j+1}$ et on peut ainsi décomposer jusqu'à V_0 .

Si par exemple on a $N = 8 = 2^3$ composantes dans un signal (supposé périodisé)



On peut stocker le résultat de la décomposition en ondelettes



4.2.5 La transformée en ondelettes pour les images

On veut construire des bases 2D. Pour cela, on utilise le produit tensoriel. Soit $f : E_1 \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : F_2 \rightarrow \mathbb{C}$, alors, le produit tensoriel de f et g est

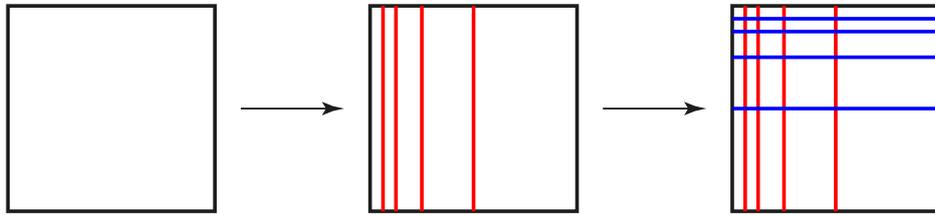
$$h : F_1 \otimes F_2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1)g(x_2)$$

On construit les bases 2D à partir de bases d'ondelettes 1D. Soit φ et ψ les fonctions d'échelle et d'ondelettes provenant d'une AMR. On a deux constructions possibles.

1. Bases d'ondelettes tensorielles (ou anisotropes si on ne prend pas les mêmes AMR pour chaque direction)

$$\Psi_{k,k'}^{j,j'}(x_1, x_2) = \psi_{j,k}(x_1)\psi_{j',k'}(x_2), \quad (j, j', k, k') \in \mathbb{Z}^4.$$

Cette transformée en ondelettes 2D utilise la transformée en ondelettes 1D sur les lignes d'une image puis sur les colonnes.



On dit que cette décomposition est standard. Elle est simple à mettre en œuvre.

2. Ondelettes issues d'AMR de $L^2(\mathbb{R}^2) : V_j^2 = V_j \otimes V_j$. L'espace des détails (ondelettes) W_j^2 est défini comme le complémentaire orthogonal de V_j^2 dans V_{j+1}^2 . On a donc

$$V_{j+1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2,$$

ce qui conduit à

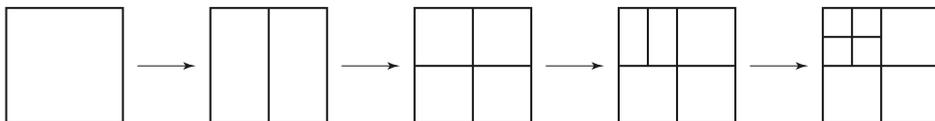
$$\begin{aligned} V_{j+1}^2 &= V_{j+1} \otimes V_{j+1} \\ &= (V_j^2 \oplus W_j^2) \otimes (V_j^2 \oplus W_j^2) \\ &= \underbrace{(V_j^2 \otimes V_j^2)}_{V_j^2} \oplus \underbrace{(V_j^2 \otimes W_j^2) \oplus (W_j^2 \otimes V_j^2) \oplus (W_j^2 \otimes W_j^2)}_{W_j^2} \end{aligned}$$

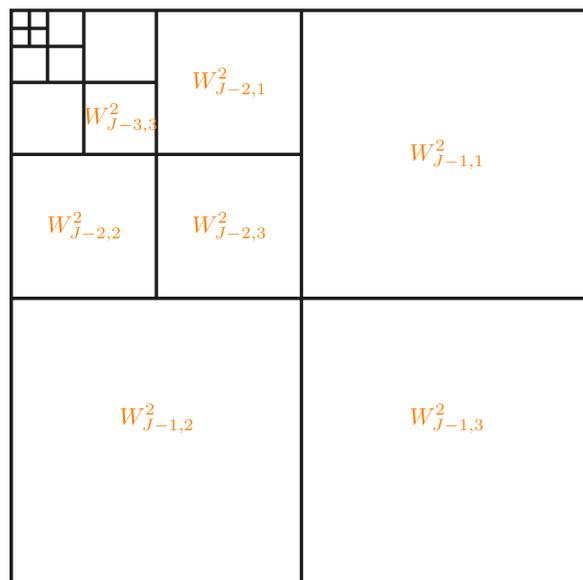
donc

$$V_j^2 = \text{Vect} \{ \varphi_{j,k}(x_1)\varphi_{j,k'}(x_2), \quad (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \}$$

et

$$W_j^2 = \text{Vect} \{ \varphi_{j,k}(x_1)\psi_{j,k'}(x_2); \psi_{j,k}(x_1)\varphi_{j,k'}(x_2); \psi_{j,k}(x_1)\psi_{j,k'}(x_2) \quad (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \}.$$





On dit que cette décomposition est non standard, mais elle a un avantage important : elle nécessite beaucoup moins de calculs et est plus efficace. C'est dans la pratique celle qu'on utilise.



Bibliographie

Livres

- [1] Maïtine BERGOUNIOUX. *Introduction au traitement mathématique des images - méthodes déterministes*. 1^{re} édition. Mathématiques et Applications 76. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.
- [2] Ole CHRISTENSEN. *An introduction to frames and Riesz bases*. 1^{re} édition. Applied and numerical harmonic analysis. Birkhäuser, 2003.
- [3] Stephane MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 2^e édition. Wavelet Analysis and Its Applications. Academic Press, 1999.



Index

A

aliasing 47
 approximation multirésolution 71

B

base orthonormée 30
 base orthonormée d'ondelettes 76
 bases de Riesz 31
 biorthogonalité 31

C

convolution 11
 convolution discrète 14

D

Dirac 34

E

échantillonnage 45
 espaces de Banach 26
 espaces de Hilbert 27
 espaces de Lebesgue 11

F

filtre 12
 filtre miroir conjugué 75

fonction de transfert 37
 formule de Poisson 39, 60
 frame 32

H

Heisenberg 41
 histogramme 18
 histogramme cumulé 18
 histogramme normalisé 18

N

noyau reproduisant 66

O

opérateur 26
 orthogonalité 27

P

Parseval 30, 38
 Plancherel 30, 38
 projection orthogonale 27

S

série de Fourier 52
 Shannon 61
 Shannon-Whittaker 46

T

transformée de Fourier	35
transformée de Fourier à fenêtre.....	64
transformée de Fourier discrète.....	53
transformée de Fourier rapide	56
transformée en ondelettes	67
transformée en ondelettes discrète.....	79
transformée en ondelettes rapide	77