Université Paul Sabatier Juin 2016

Licence 3 MApI^3 **Examen Méthodes numériques pour les EDOs**

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Exercice 1. Construire le polynôme de Lagrange p_4 qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$.

Exercice 2. On souhaite dans cet exercice utiliser l'interpolation de Hermite pour une utilisation dans le cadre de la construction d'une formule de quadrature d'ordre élevé. On rappelle que l'objectif de l'interpolation de Hermite est de construire un polynôme d'interpolation d'une fonction f en utilisant des valeurs de f et de sa dérivée f' aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ d'un intervalle $[a,b]$.

1. On définit les polynômes $H_i(x) = (1-2l_i'(x_i)(x-x_i))l_i^2(x)$ et $\tilde{H}_i(x) = (x-x_i)l_i^2(x)$ où on rappelle que l'on note $l_i(x) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, $0 \leq i \leq n$ les polynômes de Lagrange relatifs aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Montrer que $H_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $H_i'(x_j) = 0$, et $\tilde{H}_i(x_j) = 0$, $\tilde{H}_i'(x_j) = \delta_{i,j}$.
2. Soit p_n le polynôme de degré $2n+1$ qui s'écrit
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)H_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\tilde{H}_i(x).$$
Montrer que p_n ainsi défini est l'unique polynôme d'interpolation (dit de Hermite) qui vérifie $p_n(x_i) = f(x_i)$ et $p_n'(x_i) = f'(x_i)$, $0 \leq i \leq n$.
3. Soit f une fonction de classe $C^1([-1,1])$ et p le polynôme interpolateur de Hermite de f vérifiant
$$p(-1) = f(-1), \quad p'(-1) = f'(-1), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$
Écrire le polynôme p.
4. On désire calculer une approximation de $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$. On propose la méthode de quadrature $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt$, où p désigne le polynôme calculé à la question précédente. Montrer que l'on a
$$J(f) = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}((f'(-1) - f'(1)).$$
5. Soit $E(f) = I(f) - J(f)$. Calculer $E(t \to t^q)$ pour $q = 0,1,2,3,4$ et en déduire l'ordre de la méthode.

Pour les deux exercices suivants, on s'intéresse à l'approximation numérique de l'équation différentielle ordinaire pour $x(t) \in \mathbb{R}$ pour $t \in I_0 = [t_0, t_0+T]$
$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$
où f est continue de $I_0 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et globalement lipschitizenne par rapport à sa deuxième variable.

Exercice 3. On introduit une subdivision uniforme $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$ et on pose $h = t_{n+1} - t_n$ et $t_n = nt + t_0$. On considère la méthode multi-pas à deux niveaux

$$x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 2h\left[f(t_{n+1}, x_{n+1}) + 2hf(t_n, x_n)\right], \quad n \geq 0,$$

avec x_0 et x_1 donnés.

1. La méthode considérée est-elle explicite ou implicite ?
2. Déterminer le premier polynôme caractéristique associé à cette méthode.
3. Calculer les racines du premier polynôme caractéristique et déterminer si la méthode est zéro-stable ou non.

Exercice 4. On introduit une subdivision uniforme $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$ et on pose $h = t_{n+1} - t_n$ et $t_n = nt + t_0$.

On considère la méthode de Runge-Kutta suivante

$$\begin{aligned}
&k_1 = f(t_n, x_n),\\
&k_2 = f(t_n + h/2, x_n + hk_1/2),\\
&k_3 = f(t_n + h/2, x_n + hk_2/2),\\
&k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3),\\
&x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}$$

1. Écrire le tableau de Butcher associé.
2. On considère l'équation différentielle ordinaire $x'(t) = -x(t)$, $x(0) = 1$. Trouver une formule analytique de $x(h)$ basé sur la méthode de Runge-Kutta ci-dessus.
3. Pour cette équation différentielle ordinaire, de quel ordre est la méthode de Runge-Kutta considérée ? Est-elle elle convergente ?
4. Comparer $x(h)$ à la solution exacte e^{-h}.
5. Cette méthode de Runge-Kutta est-elle A-stable ?