Université Paul Sabatier Mai 2016

Licence 3 MApI^3 **Examen Méthodes numériques pour les EDOs**

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Exercice 1. Soit $f(x) = \sin(x)$.

1. Calculer le polynôme p_1 d'interpolation de Lagrange de f relativement aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = \pi/2$.
2. Calculer le polynôme p_2 d'interpolation de Lagrange de f relativement aux points $x_0 = 0$, $x_2 = \pi/4$ et $x_1 = \pi/2$.
3. Montrer que $\forall\, x \in [x_0, x_1]$,

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} - \frac{2}{\pi}\arccos(\frac{2}{\pi}),$$
$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}\pi^3}{1728}.$$

Exercice 2. On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}dx.$$

1. Calcul la valeur exacte de I.
2. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $n = 3$ sous-intervalles.
3. Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à $\ln(2)$?
4. Quel nombre de sous-intervalles n faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ? On rappelle que l'erreur de quadrature associée s'écrit, si $f \in C^2([a, b])$,

$$|E_n| = \left|\frac{(b-a)^4}{12n^2} f''(\xi)\right|, \qquad \xi \in]a, b[.$$

Pour les trois exercices suivants, on s'intéresse à l'approximation numérique de l'équation différentielle ordinaire pour $x(t) \in \mathbb{R}$ pour $t \in I_0 = [t_0, t_0 + T]$

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

où f est continue de $I_0 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et globalement lipschitizenne par rapport à sa deuxième variable.

Exercice 3. On introduit une subdivision $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$ et on pose $h_n = t_{n+1} - t_n$.

On considère une méthode numérique à un pas pour calculer une suite d'approximation $(x_n)_{n\geq 0}$ de la solution $(x(t_n))_{n\geq 0}$ par le schéma

$$x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, h_n).$$

1. Rappeler la définition de la stabilité du schéma à un pas associé à Φ.
2. On suppose que Φ satisfait une condition de Lipschitz

$$\|\Phi(t,x,h) - \Phi(t,z,h)\| \leq \Lambda\|x-z\|, \quad h \in [0,h^*],\ t \in [t_0, t_0+T],\ (x,z) \in \mathbb{R}^2.$$

   Montrer que si

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + h_n\Phi(t_n, z_n, h_n) + \eta_n, \quad \eta_n \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} &= x_n + h_n\Phi(t_n, x_n, h_n), \end{aligned}$$

   alors

$$\|z_{n+1} - x_{n+1}\| \leq e^{h_n\Lambda}\|z_n - x_n\| + \|\eta_n\|.$$

3. Montrer par récurrence que si une suite de termes réels positifs $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie

$$u_{n+1} \leq e^{h_n\Lambda}u_n + \alpha_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{R},$$

   alors

$$u_n \leq u_0 \prod_{\ell=0}^{n-1} e^{h_\ell\Lambda} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell \prod_{k=\ell+1}^{n-1} e^{h_k\Lambda}$$

   avec les conventions $\displaystyle\prod_{k=j+1}^{j} \cdot = 1$ pour tout $j \geq -1$ et $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{-1} \cdot = 0$.
4. Déduire des deux questions précédentes que

$$\|z_n - x_n\| \leq e^{\Lambda T}\left(\|z_0 - x_0\| + \sum_{\ell=0}^{n-1}\|\eta_\ell\|\right)$$

   et que le schéma à un pas est stable.

Exercice 4. On introduit une subdivision uniforme $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$ et on pose $h = t_{n+1} - t_n$ et $t_n = nt + t_0$. On considère la méthode multi-pas à deux niveaux

$$x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 2h\left[f(t_{n+1}, x_{n+1}) + 2hf(t_n, x_n)\right], \quad n \geq 0,$$

avec x_0 et x_1 donnés.

1. La méthode considérée est-elle explicite ou implicite ?
2. Déterminer le premier polynôme caractéristique associé à cette méthode.
3. Calculer les racines du premier polynôme caractéristique et déterminer si la méthode est zéro-stable ou non.

Exercice 5. On introduit une subdivision uniforme $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$ et on pose $h = t_{n+1} - t_n$ et $t_n = nt + t_0$.

On considère la méthode de Runge-Kutta suivante

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, x_n + hk_1/2), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, x_n + hk_2/2), \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

1. Écrire le tableau de Butcher associé.
2. On considère l'équation différentielle ordinaire $x'(t) = -x(t)$, $x(0) = 1$. Trouver une formule analytique de $x(h)$ basé sur la méthode de Runge-Kutta ci-dessus.
3. Pour cette équation différentielle ordinaire, de quel ordre est la méthode de Runge-Kutta considérée ? Est-elle elle convergente ?
4. Comparer $x(h)$ à la solution exacte e^{-h}.
5. Cette méthode de Runge-Kutta est-elle A-stable ?