Université Paul Sabatier | Mai 2015

Licence 3 MApI^3

Examen Méthodes numériques pour les EDOs

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Exercice 1. Soit p_4 le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$.

1. De quel degré est le polynôme p_4 ?
2. Calculer p_4 en utilisant l'algorithme des différences divisées.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle ordinaire $x'(t) = \lambda x(t)$, avec $x(0) = 1$ et $\lambda = -10$. On souhaite calculer une solution approchée de cette équation à l'aide de la méthode d'Euler explicite et d'Euler implicite. On note x_n une approximation de $x(t_n)$, $t_n = nh$ où h est le pas de discrétisation

1. Rappeler les relations de récurrence définissant x_{n+1} en fonction de x_n pour les méthodes d'Euler explicite et implicite.
2. On considère successivement les cas $h = 1/6$ et $h = 1/12$: calculer x_1, x_2 et x_3 pour les deux méthodes considérées.
3. Tracer les points (t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2) et (t_3, x_3) et comparer avec un tracé de la solution exacte.
4. Quelle est la plus grande valeur de h qu'il est possible d'utiliser quand $\lambda = -10$ pour assurer que $x_n > 0$ pour tout $n = 1, 2, 3, \cdots$ pour les deux méthodes ?
5. Déterminer la région de stabilité absolue pour les méthodes d'Euler explicite et implicite
6. Ces méthodes sont-elles A-stable ?

Exercice 3. On souhaite dans cet exercice utiliser l'interpolation de Hermite pour une utilisation dans le cadre de la construction d'une formule de quadrature d'ordre élevé. On rappelle que l'objectif de l'interpolation de Hermite est de construire un polynôme d'interpolation d'une fonction f en utilisant des valeurs de f et de sa dérivée f' aux points $(x_i)_{0\le i\le n}$ d'un intervalle $[a,b]$.

1. On définit les polynômes $H_i(x) = (1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i))l_i^2(x)$ et $\tilde{H}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$ où on rappelle que l'on note $l_i(x) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, $0 \le i \le n$ les polynômes de Lagrange relatifs aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Montrer que $H_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $H_i'(x_j) = 0$, et $\tilde{H}_i(x_j) = 0$, $\tilde{H}_i'(x_j) = \delta_{i,j}$.
2. Soit p_n le polynôme de degré $2n+1$ qui s'écrit
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)H_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\tilde{H}_i(x).$$
Montrer que p_n ainsi défini est l'unique polynôme d'interpolation (dit de Hermite) qui vérifie $p_n(x_i) = f(x_i)$ et $p_n'(x_i) = f'(x_i)$, $0 \le i \le n$.
3. Soit f une fonction de classe $C^1([-1,1])$ et p le polynôme interpolateur de Hermite de f vérifiant
$$p(-1) = f(-1), \quad p'(-1) = f'(-1), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$
Écrire le polynôme p.

4. Quel serait le polynôme d'interpolation de Lagrange en ne considérant que les points sans dérivée ?
5. On désire calculer une approximation de $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$. On propose la méthode de quadrature $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt$, où p désigne le polynôme calculé à la question précédente. Montrer que l'on a

$$J(f) = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}((f'(-1) - f'(1)).$$

6. Soit $E(f) = I(f) - J(f)$. Calculer $E(t \to t^q)$ pour $q = 0, 1, 2, 3, 4$ et en déduire l'ordre de la méthode.