Université Paul Sabatier Mai 2015

Licence 3 MApI^3

Examen Méthodes numériques pour les EDOs

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Exercice 1. Construire le polynôme de Lagrange p_4 qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$.

Exercice 2. On souhaite dans cet exercice utiliser l'interpolation de Hermite pour une utilisation dans le cadre de la construction d'une formule de quadrature d'ordre élevé. On rappelle que l'objectif de l'interpolation de Hermite est de construire un polynôme d'interpolation d'une fonction f en utilisant des valeurs de f et de sa dérivée f' aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ d'un intervalle $[a,b]$.

1. On définit les polynômes $H_i(x) = (1-2l_i'(x_i)(x-x_i))l_i^2(x)$ et $\tilde{H}_i(x) = (x-x_i)l_i^2(x)$ où on rappelle que l'on note $l_i(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, $0 \leq i \leq n$ les polynômes de Lagrange relatifs aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Montrer que $H_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $H_i'(x_j) = 0$, et $\tilde{H}_i(x_j) = 0$, $\tilde{H}_i'(x_j) = \delta_{i,j}$.
2. Soit p_n le polynôme de degré $2n+1$ qui s'écrit
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)H_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\tilde{H}_i(x).$$
Montrer que p_n ainsi défini est l'unique polynôme d'interpolation (dit de Hermite) qui vérifie $p_n(x_i) = f(x_i)$ et $p_n'(x_i) = f'(x_i)$, $0 \leq i \leq n$.
3. Soit f une fonction de classe $C^1([-1,1])$ et p le polynôme interpolateur de Hermite de f vérifiant
$$p(-1) = f(-1), \quad p'(-1) = f'(-1), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$
Écrire le polynôme p.
4. On désire calculer une approximation de $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$. On propose la méthode de quadrature $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt$, où p désigne le polynôme calculé à la question précédente. Montrer que l'on a
$$J(f) = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}((f'(-1) - f'(1)).$$
5. Soit $E(f) = I(f) - J(f)$. Calculer $E(t \to t^q)$ pour $q = 0,1,2,3,4$ et en déduire l'ordre de la méthode.

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{1}$$
sur l'intervalle $t \in [0,10]$.

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy.

2. On subdivise l'intervalle de temps par des points équidistants et on note h le pas de temps. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire.
3. En déduire une forme du type
$$x_n = g(h, n).$$
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour dessiner approximativement sur la feuille ci-jointe les solutions
   — exacte,
   — obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 5/2$, pour $n = 0, \cdots, 4$,
   — obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 3/2$, pour $n = 0, \cdots, 6$,
   — obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 1/2$, pour $n = 0, \cdots, 12$.
5. Déterminer la région de stabilité absolue pour la méthode d'Euler explicite.
6. La méthode d'Euler explicite est-elle A-stable ?
7. On considère la méthode de Runge-Kutta suivante
$$\begin{aligned}
&k_1 = f(t_n, x_n),\\
&k_2 = f(t_n + \tfrac{h}{2}, x_n + h\tfrac{k_1}{2}),\\
&k_3 = f(t_n + h, x_n + h(-k_1 + 2k_2)),\\
&x_{n+1} = x_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).
\end{aligned}$$
   Écrire le tableau de Butcher associé.
8. De quel ordre est cette méthode
9. On suppose que $h = 0.1$. Calculer x_1 si on applique ce schéma à l'équation (1).
10. Déterminer la région de stabilité absolue de cette méthode. On indique que la seule racine réelle du polynôme $q(h) = h^3 - 3h^2 + 6h - 12$ est
$$(4 + \sqrt{17})^{1/3} - \frac{1}{(4 + \sqrt{17})^{1/3}} + 1$$
    dont la valeur approchée est 2.513.
11. La méthode de Runke-Kutta est-elle A-stable ?