

Exercice 0 : télécharger les données sur la page dédiée au cours.

<http://www.math.univ-toulouse.fr/~cbesse/site/enseignement/>

Exercice 1 : Méthode de Schwarz alternée en 2D.

On souhaite résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_1^k = f, & x \in \Omega_1, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_1^k + p u_1^k = \partial_{\mathbf{n}} u_2^{k-1} + p u_2^{k-1}, & x \in \Gamma, \\ u_1^k = 0, & x \in \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_2^k = f, & x \in \Omega_2, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_2^k - p u_2^k = \partial_{\mathbf{n}} u_1^{k-1} - p u_1^{k-1}, & x \in \Gamma, \\ u_2^k = 0, & x \in \partial\Omega_2 \setminus \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

On note $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et Γ l'interface commune à Ω_1 et Ω_2 . La normale \mathbf{n} est la normale unitaire sortante à Ω_1 sur Γ .

L'objet de cet exercice est de résoudre (1) par une méthode d'éléments finis \mathbb{P}_1 . À titre d'exemple, le problème de Poisson sur un domaine complet Ω est donné par la fonction `poisson.m` fournie dans les données téléchargées. La méthode utilisée est décrite dans la Section 5.1 du polycopié https://www.math.univ-toulouse.fr/~cbesse/site/enseignement/fichiers/ef_m1meca.pdf.

1. Générer le maillage d'un carré ou d'un cercle avec `gmsh`. On pourra utiliser les géométries fournies dans les données téléchargées.
2. Mettre en œuvre l'algorithme.
3. Tester plusieurs valeurs de p .

Exercice 2 : Méthode SWR avec conditions de transmission de Dirichlet.

L'objet de cet exercice est de résoudre l'équation d'advection-diffusion

$$\partial_t u + \mathcal{L}u := \partial_t u + a \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = f, \quad x \in (a_0, b_0), \quad (2)$$

avec $a > 0$, $\nu > 0$ et $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

Mettre en œuvre la méthode SWR suivante

$$\begin{cases} \partial_t u_1^k + \mathcal{L}u_1^k = f, & x \in (a_1, b_1), t \in (0, T), \\ u_1^k = g_l, & x = a_1, t \in (0, T), \\ u_1^k = u_2^{k-1}, & x = b_1, t \in (0, T), \\ u_1^k = u_I, & x \in (a_1, b_1), t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t u_2^k + \mathcal{L}u_2^k = f, & x \in (a_2, b_2), t \in (0, T), \\ u_2^k = u_1^{k-1}, & x = a_2, t \in (0, T), \\ \partial_x u_2^k = g_r, & x = b_2, t \in (0, T), \\ u_2^k = u_I, & x \in (a_2, b_2), t = 0, \end{cases} \quad (3)$$

avec un schéma de Crank-Nicolson en temps et une méthode de différences finies en espace. Ici, $a_1 = a_0$ et $b_2 = b_0$ de sorte que $\Omega = (a_0, b_0) = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$. On supposera qu'un overlap est présent, c'est à dire que $b_1 = a_2 + \ell$ afin que la méthode converge.

On pourra consulter la fonction `advection_diffusion.m` afin d'avoir une base de départ.

Extension 1 Dresser l'historique de convergence (erreur en fonction du nombre d'itérations) en fonction de T .

Extension 2 Reproduire cet exercice avec plus de sous-domaines, et dresser l'historique de convergence en fonction de T .

Extension 3 Mettre en place une méthode SWR à fenêtre (on pourra tester des fenêtres de 10 à 20 pas de temps par exemple), et dresser l'historique de convergence en fonction de T .

Exercice 3 : Méthode SWR avec conditions de transmission optimisée d'ordre 0.

On souhaite toujours résoudre l'équation (2). Cette fois, on utilise les conditions de transmission d'ordre 0 vues en cours.

$$\begin{cases} \partial_t u_1^k + \mathcal{L}u_1^k = f, & x \in (a_1, b_1), t \in (0, T), \\ u_1^k = g_l, & x = a_1, t \in (0, T), \\ \partial_x u_1^k - \lambda_1 u_1^k = \partial_x u_2^{k-1} - \lambda_1 u_2^{k-1}, & x = b_1, t \in (0, T), \\ u_1^k = u_I, & x \in (a_1, b_1), t = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t u_2^k + \mathcal{L}u_2^k = f, & x \in (a_2, b_2), t \in (0, T), \\ \partial_x u_2^k - \lambda_2 u_2^k = \partial_x u_1^{k-1} - \lambda_2 u_1^{k-1}, & x = a_2, t \in (0, T), \\ \partial_x u_2^k = g_r, & x = b_2, t \in (0, T), \\ u_2^k = u_I, & x \in (a_2, b_2), t = 0, \end{cases} \quad (4)$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{a-p}{2\nu}, \quad \lambda_2 = \frac{a+p}{2\nu}.$$

Ici, $p > 0$ et on supposera encore pour simplifier que l'overlap $\ell > 0$.

1. Mettre en œuvre la méthode avec le même type d'approximation qu'à l'exercice précédent.
2. Tracer la courbe permettant l'optimisation de p .
3. Faire l'étude numérique de la convergence en fonction de p .

Extension 1 Mettre en œuvre la méthode SWR avec conditions de transmission optimisée d'ordre 1.

Extension 2 Reproduire cet exercice avec plus de sous-domaines, et dresser l'historique de convergence en fonction de T .

Extension 3 Mettre en place une méthode de DDM à fenêtre (on pourra tester des fenêtres de 10 à 20 pas de temps par exemple), et dresser l'historique de convergence en fonction de T .