Feuille de TD #3

Exercice 1

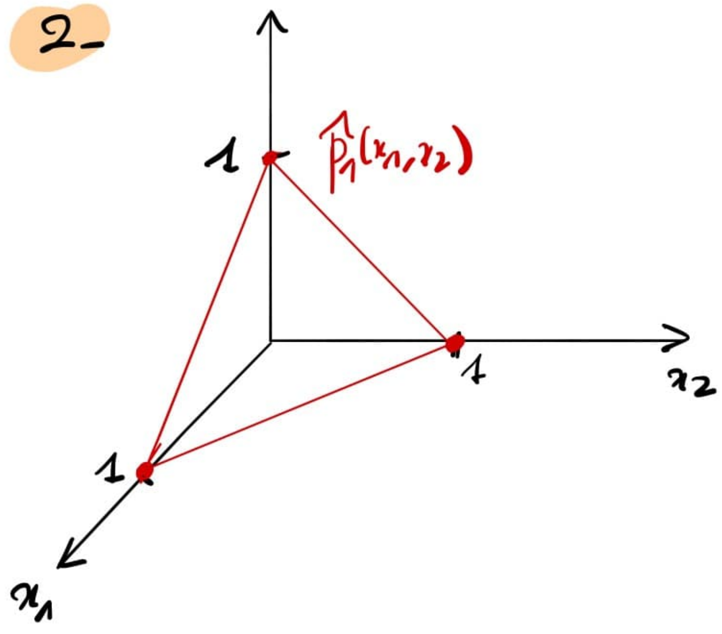
Les fonctions de forme ne sont rien d'autre que les coordonnées barycentriques.

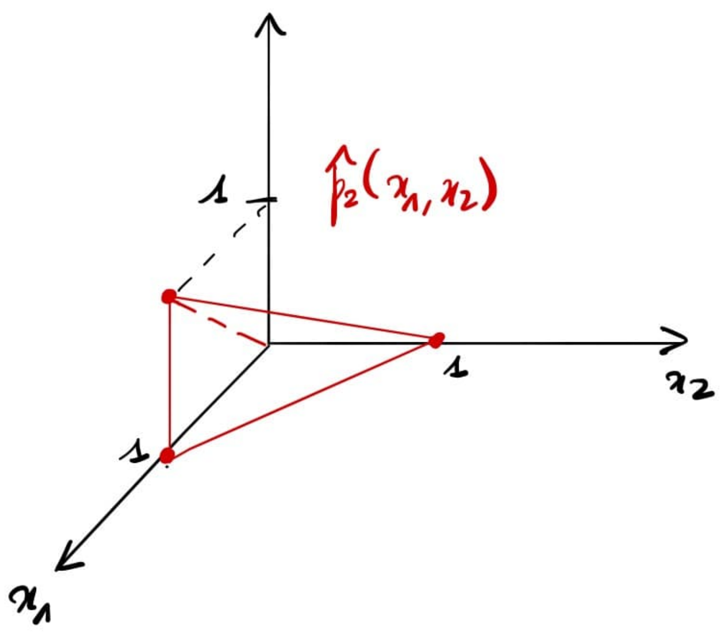
1- On a donc $\hat{p}_1(x_1,x_2) = 1-x_1-x_2$

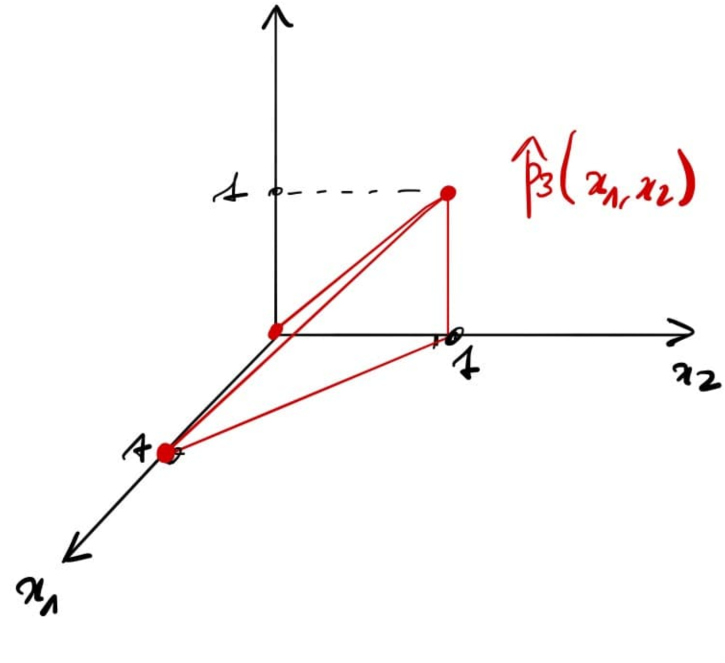
$\hat{p}_2(x_1,x_2) = x_1$

$\hat{p}_3(x_1,x_2) = x_2$

2-







Exercice 2 $\quad M_1=(1,1)\ ;\ M_2=(3,2)\ ;\ M_3=(2,3)$

$p\in\mathbb{P}_1 \qquad p(M_1)=2,\quad p(M_2)=1\ ;\ p(M_3)=6$

1- $p\in\mathbb{P}_1$ et donc p est de la forme $p(x)=a_0+a_1x_1+a_2x_2$.

$$\begin{aligned} p(M_1) &= a_0+a_1+a_2=2 \\ p(M_2) &= a_0+3a_1+2a_2=1 \\ p(M_3) &= a_0+2a_1+3a_2=6 \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$$

On a
$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

et donc
$$p(x)=1-2x_1+3x_2,\quad \text{avec } x=(x_1,x_2)$$

2- On sait que $p_i(M_j)=\delta_{ij}$.

On indique dans le texte :

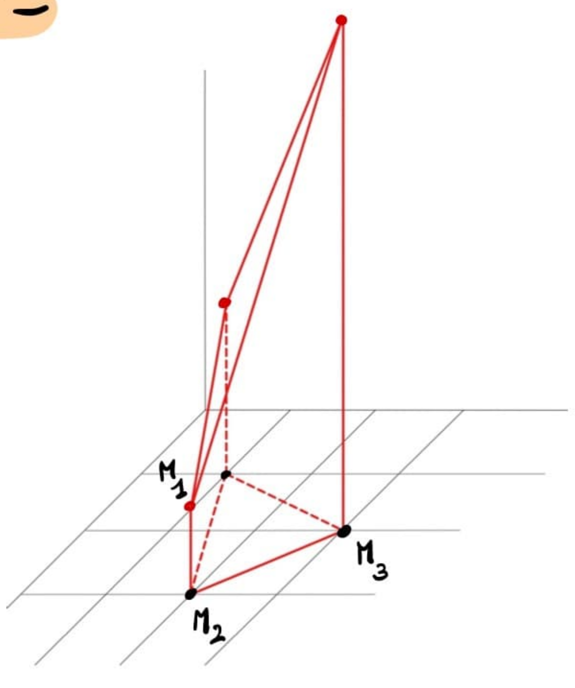
$p(x)=2p_1(x)+p_2(x)+6p_3(x)$

On a donc

$$p(M_1)=2\underbrace{p_1(M_1)}_{1}+\underbrace{p_2(M_1)}_{0}+6\underbrace{p_3(M_1)}_{0}$$
$=2$

On a également
$p(M_2)=1$ et $p(M_3)=6$

3-

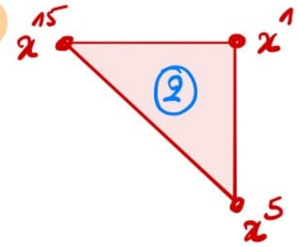


On a donc une autre représentation des polynômes de $\mathbb{P}_1$ sur T à l'aide de fonctions de base différentes.

$$\mathbb{P}_1[1,x_1,x_2] \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_1[p_1,p_2,p_3]$$

Exercice 3

1_



La restriction des fonctions de base φ_n aux triangles constituants le maillage sont les fonctions de forme.

Les fonctions de forme ne sont rien d'autre que les coordonnées barycentriques.

On fait correspondre les sommets globaux à des nœuds locaux

$$x^1 \to a^1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad x^5 \to a^2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^{15} \to a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On peut calculer les coordonnées barycentriques

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{a^1} & \boxed{a^2} & \boxed{a^3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

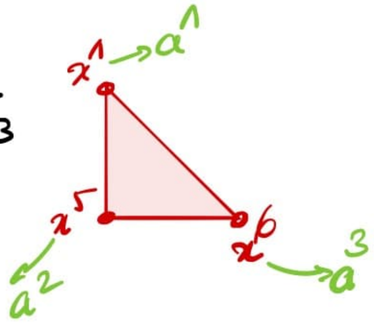
Ainsi,
$$\begin{cases} \lambda_1 = 2x_1 + 2x_2 - 1 \\ \lambda_2 = \quad\quad -2x_2 + 1 \\ \lambda_3 = -2x_1 \quad\quad + 1 \end{cases}$$

Comme $a^1 \to x^1$, la restriction de φ_1 à T_2 est

$$\varphi_1\big|_{T_2} = 2x_1 + 2x_2 - 1$$

$$\text{et} \quad \nabla\varphi_1\big|_{T_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2– Triangle T_3

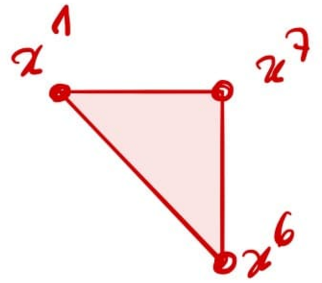


$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2x_2 = \varphi_1\big|_{T_3} \; ; \; \nabla\varphi_1\big|_{T_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

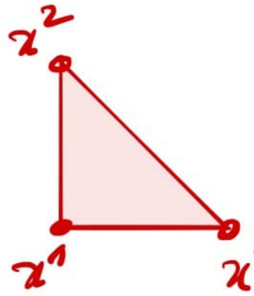
On répète ces calculs pour chaque triangle faisant partie du support de φ_1.

T_4



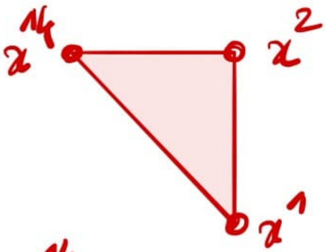
$$\varphi_1\big|_{T_4} = -2x_1 + 2 \quad , \quad \nabla\varphi_1\big|_{T_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

T_7



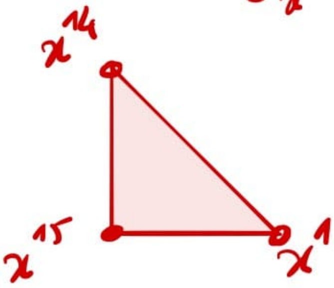
$$\varphi_1\big|_{T_7} = 3 - 2x_1 - 2x_2 \; ; \quad \nabla\varphi_1\big|_{T_7} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

T_6



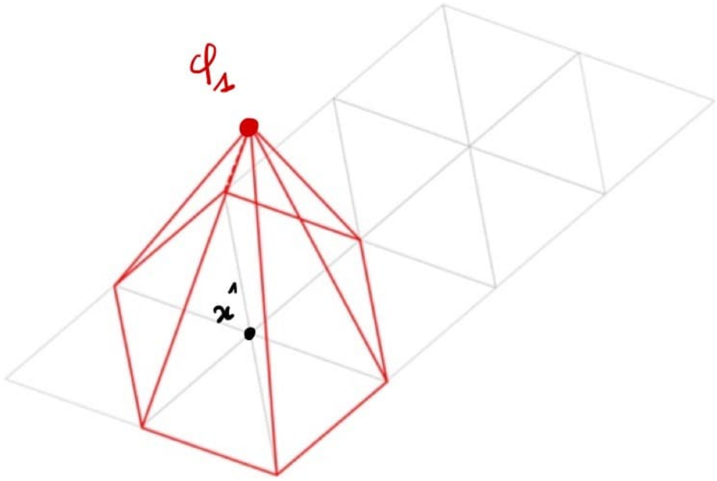
$$\varphi_1\big|_{T_6} = 2 - 2x_2 \quad ; \quad \nabla\varphi_1\big|_{T_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

T_5



$$\varphi_1\big|_{T_5} = 2x_1 \quad ; \quad \nabla\varphi_1\big|_{T_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3-



4- $w_h(x) = \varphi_1(x) + 3\varphi_2(x) + 2\varphi_3(x)$

$w_h(x^1) = \underbrace{\varphi_1(x^1)}_{1} + 3\underbrace{\varphi_2(x^1)}_{0} + 2\underbrace{\varphi_3(x^1)}_{0} = 1$ ✓

$w_h(x^2) = \underbrace{\varphi_1(x^2)}_{0} + 3\underbrace{\varphi_2(x^2)}_{1} + 2\underbrace{\varphi_3(x^2)}_{0} = 3$ ✓

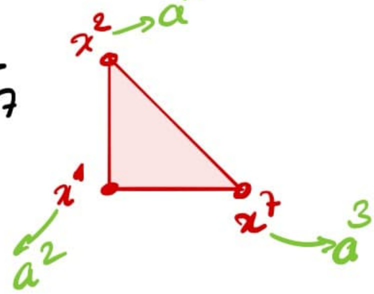
$w_h(x^3) = \underbrace{\varphi_1(x^3)}_{0} + 3\underbrace{\varphi_2(x^3)}_{0} + 2\underbrace{\varphi_3(x^3)}_{1} = 2$ ✓

$w_h(1/2, 3/4)$ le point $P = (1/2, 3/4)$ est commun aux triangles T_6 et T_7

d'où $w_h(P) = \varphi_1(P) + 3\varphi_2(P)$ car $\varphi_3(P) = 0$.

Il faut déterminer φ_2 sur T_6 ou T_7. Calculons le sur T_7

Triangle T_7



$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2x_2 - 1 = \varphi_2\big|_{T_7}$

$\Rightarrow \varphi_2(P) = 1/2$

d'autre part $\varphi_1\big|_{T_6} = 2 - 2x_2 \Longrightarrow \varphi_1(P) = 1/2$

$\Longrightarrow w_h(P) = 2$

Exercice 4

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 1 & , (x_1,x_2)\in\Omega \\ \partial_n u = 0 & , (x_1,x_2)\in\partial\Omega \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ solution évidente : $u(x_1,x_2)=1$.

1- On multiplie l'équation par une fonction test v, puis on intègre sur Ω.

$$\int_\Omega -\Delta u\, v\, dx + \int_\Omega u v\, dx = \int_\Omega v\, dx$$

On applique la formule de Green :

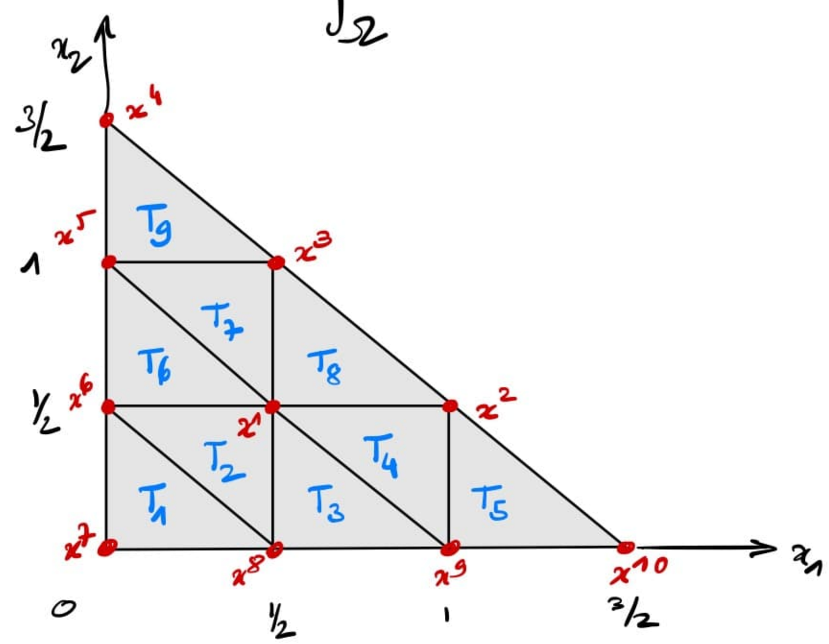
$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \partial_n u . v\, ds}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ par hypothèse}} + \int_\Omega u v\, dx = \int_\Omega v\, dx$$

Pour que les intégrales soient finies, il suffit de prendre $u\in H^1(\Omega)$ et $v\in H^1(\Omega)$. La formulation variationnelle est donc :

Trouver $u\in H^1(\Omega)$ telle que $a(u,v) = \ell(v), \forall v\in H^1(\Omega)$

où
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx + \int_\Omega u v\, dx$$
$$\ell(v) = \int_\Omega v\, dx$$

2-



3- On a vu en cours que

$$\int_{\Omega_e} \lambda_1^n \lambda_2^p \lambda_3^q \, dx_1 dx_2 = 2\,\text{Aire}(\Omega_e) \frac{n!\,p!\,q!}{(n+p+q+2)!}$$, où Ω_e est un 2-simplexe

et λ_i sont les coordonnées barycentriques associées.

On sait que la matrice de masse locale M_{loc} est définie par

$$M_{loc}(i,j) = \int_{\Omega_e} \lambda_i \lambda_j \, dx_1 dx_2, \qquad 1 \leq i,j \leq 3.$$

On a ainsi : $M_{loc}(1,1) = \int_{\Omega_e} \lambda_1^2 \, dx_1 dx_2$, d'où, en utilisant la formule précédente $n=2, p=0, q=0$ $M_{loc}(1,1) = 2\text{Aire}(\Omega_e) \frac{2!}{4!} = \frac{\text{Aire}(\Omega_e)}{6}$

De même, $M_{loc}(1,2) = M_{loc}(1,3) = \frac{2\,\text{Aire}(\Omega_e)}{4!} = \frac{\text{Aire}(\Omega_e)}{12}$

En rassemblant tous ces résultats : $M_{loc} = \frac{\text{Aire}(K)}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

où K est un triangle de la triangulation de $\Omega \Rightarrow \text{Aire}(K) = \frac{h^2}{2}$.

4- On sait d'après le cours que les éléments de la matrice de rigidité S associée à un élément fini $\mathbb{P}_1$ triangulaire $\Omega_e = (A_1, A_2, A_3)$ sont donnés par :

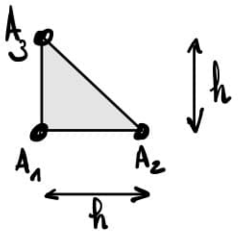
$$S_{ij} = \frac{1}{2\text{Aire}(\Omega_e)} \left(C_{11} S_1 + C_{12} S_2 + C_{22} S_3 \right)_{ij} \qquad 1 \leq i,j \leq 3$$

où $S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

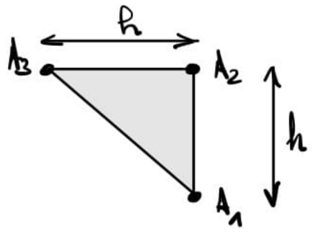
$$C = \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} & -\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \\ -\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} & \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} \end{pmatrix}$$

On a deux types de 2-simplexes dans la triangulation :

Type 1



Type 2



Type 1 $\qquad \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ d'où $C = \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$S = \frac{1}{2\mathrm{Aire}(\Omega e)} \left(C_{11} S_1 + C_{12} S_2 + C_{22} S_3 \right) \quad ; \quad \mathrm{Aire}(\Omega e) = h^2/2$$

$$= \frac{1}{h^2} \left(h^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Type 2 $\qquad \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{pmatrix} -h \\ h \end{pmatrix}$ d'où $C = \begin{pmatrix} 2h^2 & -h^2 \\ -h^2 & h^2 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$S = \frac{1}{h^2} \left(2h^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - h^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + h^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

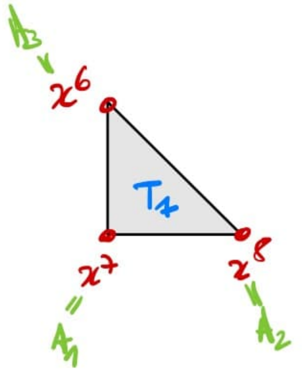
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5 _ **Assemblage**. Il faut procéder triangle par triangle et utiliser les matrices locales (ou élémentaires).

Il y a 10 degrés de liberté, donc les matrices de masse et de rigidité sont de taille 10x10

$\frac{h^2}{24}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
											1
											2
											3
											4
											5
						2	1	1			6
						1	2	1			7
						1	1	2			8
											9
											10



$$M_{loc} = \frac{h^2}{24} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 7 & 8 & 6 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 1 : 7 \\ 2 : 8 \\ 3 : 6 \\ \\ \\ \end{array}$$

Il faut donc venir déposer dans la matrice globale

$M_{loc}(1,1) \longrightarrow M(7,7)$

$M_{loc}(1,2) \longrightarrow M(7,8)$

$M_{loc}(1,3) \longrightarrow M(6,8)$

$M_{loc}(2,1) \longrightarrow M(8,7)$

$M_{loc}(2,2) \longrightarrow M(8,8)$

$M_{loc}(2,3) \longrightarrow M(8,6)$

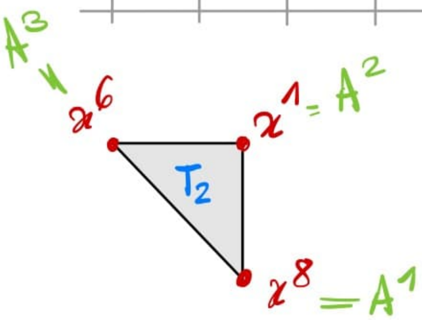
$M_{loc}(3,1) \longrightarrow M(6,7)$

$M_{loc}(3,2) \longrightarrow M(6,8)$

$M_{loc}(3,3) \longrightarrow M(6,6)$

$\frac{h^2}{24}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2					1		1		
2										
3										
4										
5										
6	1					2+2	1	1+1		
7						1	2	1		
8	1					1+1	1	2+2		
9										
10										



$$M_{loc} = \frac{h^2}{24} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} — 1 : 8 \\ — 2 : 1 \\ — 3 : 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 8 & 1 & 6 \end{array}$$

Il faut donc venir déposer dans la matrice globale en ajoutant à la valeur déjà présente.

$M_{loc}(1,1) \longrightarrow M(8,8)$

$M_{loc}(1,2) \longrightarrow M(8,1)$

$M_{loc}(1,3) \longrightarrow M(8,6)$

$M_{loc}(2,1) \longrightarrow M(1,8)$

$M_{loc}(2,2) \longrightarrow M(1,1)$

$M_{loc}(2,3) \longrightarrow M(1,6)$

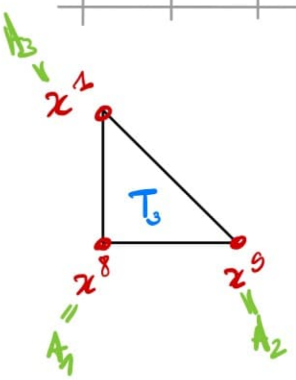
$M_{loc}(3,1) \longrightarrow M(6,8)$

$M_{loc}(3,2) \longrightarrow M(6,1)$

$M_{loc}(3,3) \longrightarrow M(6,6)$

$$\frac{h^2}{24}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2+2					1		1+1	1	
2										
3										
4										
5										
6	1					2+2	1	1+1		
7						1	2	1		
8	1+1					1+1	1	2+2+2	1	
9	1							1	2	
10										



$$M_{loc} = \frac{h^2}{24} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 1 : 8 \\ 2 : 9 \\ 3 : 1 \end{array}$$

Il faut donc venir déposer dans la matrice globale en ajoutant à la valeur déjà présente.

$M_{loc}(1,1) \longrightarrow M(8,8)$

$M_{loc}(1,2) \longrightarrow M(8,9)$

$M_{loc}(1,3) \longrightarrow M(8,1)$

$M_{loc}(2,1) \longrightarrow M(9,8)$

$M_{loc}(2,2) \longrightarrow M(9,9)$

$M_{loc}(2,3) \longrightarrow M(9,1)$

$M_{loc}(3,1) \longrightarrow M(1,8)$

$M_{loc}(3,2) \longrightarrow M(1,9)$

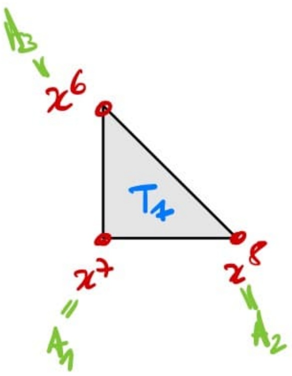
$M_{loc}(3,3) \longrightarrow M(1,1)$

En parcourant tous les triangles, on obtient la matrice de masse globale

$$
M = \frac{h^2}{24}
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\
 & 12 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\
 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
 & 2 & 1 & 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 & 2 & 0 & 2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 8 \\
 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 9 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 10
\end{array}
$$

Il faut faire de même pour la matrice de rigidité. La difficulté supplémentaire est que les matrices de rigidité changent de structure suivant le type de triangles (1 ou 2).

$$
\frac{1}{2}
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & \\
5 & & & & & & & & & & \\
6 & & & & & & 1 & -1 & & & \\
7 & & & & & & -1 & 2 & -1 & & \\
8 & & & & & & & -1 & 1 & & \\
9 & & & & & & & & & & \\
10 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$



$$
S_{loc} = \frac{1}{2}
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 : 7 \\ 2 : 8 \\ 3 : 6 \end{array} \\
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{array} &
\end{array}
$$

Il faut donc venir déposer dans la matrice globale

$S_{loc}(1,1) \longrightarrow S(7,7)$

$S_{loc}(1,2) \longrightarrow S(7,8)$

$S_{loc}(1,3) \longrightarrow S(6,8)$

$S_{loc}(2,1) \longrightarrow S(8,7)$

$S_{loc}(2,2) \longrightarrow S(8,8)$

$S_{loc}(2,3) \longrightarrow S(8,6)$

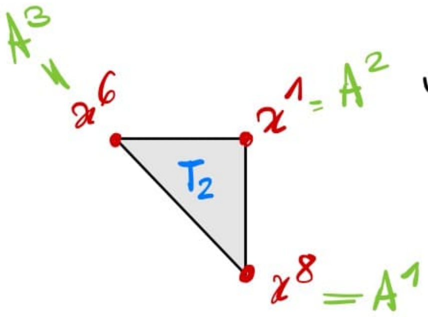
$S_{loc}(3,1) \longrightarrow S(6,7)$

$S_{loc}(3,2) \longrightarrow S(6,8)$

$S_{loc}(3,3) \longrightarrow S(6,6)$

$\frac{1}{2}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2					-1		-1		
2										
3										
4										
5										
6	-1					1+1	-1			
7						-1	2	-1		
8	-1						-1	1+1		
9										
10										



$$S_{loc} = \frac{1}{2}\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 : 8 \\ 2 : 1 \\ 3 : 6 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 8 & 1 & 6 \end{array} & \end{array}$$

Il faut donc venir déposer dans la matrice globale

$S_{loc}(1,1) \longrightarrow S(8,8)$

$S_{loc}(1,2) \longrightarrow S(8,1)$

$S_{loc}(1,3) \longrightarrow S(8,6)$

$S_{loc}(2,1) \longrightarrow S(1,8)$

$S_{loc}(2,2) \longrightarrow S(1,1)$

$S_{loc}(2,3) \longrightarrow S(1,6)$

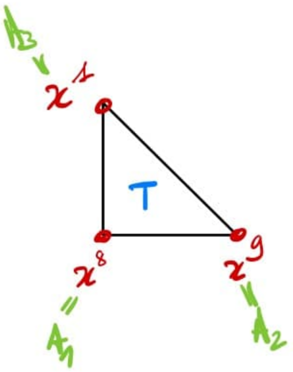
$S_{loc}(3,1) \longrightarrow S(6,8)$

$S_{loc}(3,2) \longrightarrow S(6,1)$

$S_{loc}(3,3) \longrightarrow S(6,6)$

$\frac{1}{2}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2+1					-1		-1-1		
2										
3										
4										
5										
6	-1					1+1	-1			
7						-1	2	-1		
8	-1-1						-1	1+1 +2	-1	
9								-1	1	
10										



$$S_{loc} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 : 8 \\ 2 : 9 \\ 3 : 1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 8 & 9 & 1 \end{array} & \end{array}$$

Il faut donc venir déposer dans la matrice globale

$S_{loc}(1,1) \longrightarrow S(8,8)$

$S_{loc}(1,2) \longrightarrow S(8,9)$

$S_{loc}(1,3) \longrightarrow S(8,1)$

$S_{loc}(2,1) \longrightarrow S(9,8)$

$S_{loc}(2,2) \longrightarrow S(9,9)$

$S_{loc}(2,3) \longrightarrow S(9,1)$

$S_{loc}(3,1) \longrightarrow S(1,8)$

$S_{loc}(3,2) \longrightarrow S(1,9)$

$S_{loc}(3,3) \longrightarrow S(1,1)$

En parcourant tous les triangles, on obtient la matrice de rigidité globale

$$S = \frac{1}{2}\ \begin{array}{cccccccccc c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\
8 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
-2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\
-2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 7 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 8 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 10
\end{array}$$

6- Construction du second membre b

Il correspond pour chaque ligne à $l(\phi_i)$, $1 \leq i \leq 10$

$$b_i = l(\phi_i) = \int_\Omega \phi_i(x)\,dx = \int_{\text{support}(\phi_i)} \phi_i(x)\,dx$$

$$= \int_{\sum\limits_{\Omega_e \in \text{support}(\phi_i)} \Omega_e} \phi_i(x)\,dx$$

$\text{Support}(\phi_1) = T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_7 \cup T_8$

$\text{Support}(\phi_2) = T_4 \cup T_5 \cup T_8$

$\text{Support}(\phi_3) = T_7 \cup T_8 \cup T_9$

$\text{Support}(\phi_4) = T_9$

$\text{Support}(\phi_5) = T_6 \cup T_7 \cup T_9$

$\text{Support}(\phi_6) = T_1 \cup T_2 \cup T_6$

$\text{Support}(\phi_7) = T_1$

$\text{Support}(\phi_8) = T_1 \cup T_2 \cup T_3$

$\text{Support}(\phi_9) = T_3 \cup T_4 \cup T_5$

$\text{Support}(\phi_{10}) = T_5$

On sait d'autre part que :

$$\int_{\Omega_e} \lambda_1^n \lambda_2^p \lambda_3^q \, dx_1 dx_2 = 2\text{Aire}(\Omega_e) \frac{n!\,p!\,q!}{(n+p+q+2)!}$$, où Ω_e est un 2-simplexe

Or, la restriction des ϕ_i à chaque triangles T_k est une fonction de forme égale à une coordonnée barycentrique.

Donc,
$$\int_{T_k} \phi_i(x)dx = \int_{T_k} \lambda_j(x)dx = \frac{2\text{Aire}(T_k)}{3!} = \frac{\text{Aire}(T_k)}{3}$$

Or, $\text{Aire}(T_k) = \frac{h^2}{2} \Longrightarrow \int_{T_k} \phi_i(x)dx = \frac{h^2}{6}$

D'où,
$$b = \frac{h^2}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le problème à résoudre est : trouver $u_h \in V_h = \text{vect}(\phi_1, \dots, \phi_{10})$ tq

$$a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i), \quad 1 \leq i \leq 10$$

On cherche donc $u_h(x) = \sum_{j=1}^{10} u_j \phi_j(x)$ et on est ramené à

Trouver $U = \{u_i\}_{1 \leq i \leq 10}$ tq $AU = b$, où $A = M + S$

$$M = \frac{h^2}{24} \begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{h^2}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $h = 1/2$. La solution est $U = (1, 1, \dots, 1)^T$ ce qui correspond à $u(x, y) = 1$ qui est bien solution de l'EDP.