Correction examen 2019

Exercice 1. Soit f un signal réel discret de taille N, c'est à dire $f \in \mathbb{R}^N$, où $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. Donner la définition de la transformée de Fourier discrète (DFT) de f.
2. Donner l'algorithme de la FFT (transformée de Fourier rapide) appliqué à f.
3. Quel est le coût de l'algorithme de la FFT ?
4. Quelle est la DFT de $f = (1, 0, 0, 0)$?

1 à 3 $\longrightarrow$ question de cours

4. f périodique de période N $\quad \hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$

Ici, $N=4$ et $\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{3} f_n e^{-i\frac{\pi}{2}kn}$. Or, $f_0 = 1$ et $f_{1,2,3} = 0$

$$\Longrightarrow \hat{f}_k = f_0 e^{-i\frac{\pi}{2}kn} = f_0 = 1 \ \forall k$$

$$\Longrightarrow \hat{f} = [1, 1, 1, 1]^T$$

Exercice 2. Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$, périodiques. On note $u * v$ leur convolution.

1. Rappeler la définition de la convolution des deux vecteurs périodiques u et v.
2. Soit $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, périodiques, montrer que $u * (v + w) = u * v + u * w$.
3. On considère les vecteurs périodiques $u = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$ et $v_j \in \mathbb{R}^4$, $j = 1, 2, 3, 4$ tels que $v_j(i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
   (a) Calculer $u * v_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.
   (b) En déduire $u * w$, où $w = (1, 1, 1, 1)^T$.
   (c) On considère les images I et H, supposées périodiques, représentées par les matrices

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant le même type de décomposition que dans les questions précédentes, calculer le résultat de la convolution de l'image I par le filtre H.

1 – $(u * v)_n = \sum_{p=0}^{N-1} u_p v_{n-p} = \sum_{p=0}^{N-1} u_{n-p} v_p$

2 – exercice

3- $u = [1,2,3,4]^T$, $v_j[i] = \delta_{ij}$

(a) $(u * v_1)_n = \sum_{p=0}^{3} u_{n-p} v_p$. Or, $v_p = 1$ si $p=0$ et 0 sinon

$= u_n$

$(u * v_2)_n = \sum_{p=0}^{3} u_{n-p} v_p$. Or, $v_p = 1$ si $p=1$ et 0 sinon

$= u_{n-1}$

De même $(u * v_3)_n = u_{n-2}$ et $(u * v_4) = u_{n-3}$

$u_{n-1} = [u_{-1}, u_0, u_1, u_2]^T$ et par périodicité,

$u_{-1} : u_{-1+4} = u_3$

$\rightarrow u_{n-1} = [4, 1, 2, 3]^T$

De même, $u_{n-2} = [3,4,1,2]^T$ et $u_{n-3} = [2,3,4,1]^T$

(b) Par la question 2, $u * w = u * \sum_{j=1}^{4} v_j = \sum_{j=1}^{4} u * v_j$

et on a $u * w = 10\, w$

(c) On constate que $H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4$ avec

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par définition, si A et B sont deux matrices périodiques de période N

$$(A * B)_{m,n} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} A_{p,q} B_{m-p,n-q} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} A_{m-p,n-q} B_{p,q}$$

$$(I * H_1)_{m,n} = \sum_{p=0}^{3} \sum_{q=0}^{3} I_{m-p,n-q} H_{1,p,q} = I_{m,n}$$

car $H_{1,p,q} = 1$ si $p=q=0$ et zéro sinon

De même $I * H_2 = I_{m-1,n-1}$, $I * H_3 = I_{m-2,n-2}$ et $I * H_4 = I_{m-3,n-3}$

$$I * H_2 = \begin{pmatrix} I_{-1,-1} & I_{-1,0} & I_{-1,1} & I_{-1,2} \\ I_{0,-1} & I_{0,0} & I_{0,1} & I_{0,2} \\ I_{1,-1} & I_{1,0} & I_{1,1} & I_{1,2} \\ I_{2,-1} & I_{2,0} & I_{2,1} & I_{2,2} \end{pmatrix}$$

bloc supérieur gauche de I

Par périodicité, $I_{-1,q} = I_{-1+4,q} = I_{3,q}$, $q = -1, 0, 1, 2$
et $I_{p,-1} = I_{p,-1+4} = I_{p,3}$, $p = -1, 0, 1, 2$.

D'où

$$I * H_2 = \begin{pmatrix} I_{3,3} & I_{3,0} & I_{3,1} & I_{3,2} \\ I_{0,3} & I_{0,0} & I_{0,1} & I_{0,2} \\ I_{1,3} & I_{1,0} & I_{1,1} & I_{1,2} \\ I_{2,3} & I_{2,0} & I_{2,1} & I_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De même, on montre $I * H_3 = I$ et $I * H_4 = I * H_2$

D'où,

$$I * H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 $\longrightarrow$

Exercice 3.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g : t \mapsto \cos(\lambda t)$, $t \in \mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier de g.
2. Soit $a > 0$ et $w_1 : t \mapsto \mathbb{1}_{[-a,a]}(t)$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-a, a]$. Calculer la transformée de Fourier de w_1. Avec quel taux $\widehat{w_1}(\xi)$ décroit lorsque $|\xi| \to +\infty$?
3. On considère la fonction $f_1 : t \mapsto w_1(t)g(t)$. Calculer la transformée de Fourier de f_1.
4. Proposer une représentation graphique de $|\widehat{f_1}(\xi)|$ pour $\lambda = 10$ et $a = 2$. Est-ce que $|\widehat{f_1}|$ approche bien $|\hat{g}|$?
5. On considère maintenant la fenêtre de Hann $w_2 : t \mapsto w_1(t)(1 + \cos(\pi t/a))/2$. Montrer que
$$\widehat{w_2}(\xi) = \frac{\sin(a\xi)}{2}\left(\frac{2}{\xi} + \frac{1}{\pi/a - \xi} - \frac{1}{\pi/a + \xi}\right).$$
Avec quel taux $\widehat{w_2}(\xi)$ décroit lorsque $|\xi| \to +\infty$? Est-ce que le module de la transformée de Fourier de $f_2 : t \mapsto w_2(t)g(t)$ approche mieux $|\hat{g}|$ que $|\widehat{f_1}|$?

1- $$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-it\xi}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \cos(\lambda t)\, e^{-it\xi}\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2}\, e^{-it\xi}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i(\xi-\lambda)t} + e^{-i(\xi+\lambda)t}}{2}\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1 e^{-i(\xi-\lambda)t} + 1 e^{-i(\xi+\lambda)t}}{2}\, dt$$
$$= \frac{\hat{1}(\xi-\lambda)}{2} + \frac{\hat{1}(\xi+\lambda)}{2} \qquad \text{Or, } \hat{1}(\xi) = 2\pi\delta(\xi)$$
$$\Rightarrow \hat{g}(\xi) = \pi\left(\delta(\xi-\lambda) + \delta(\xi+\lambda)\right)$$

2- $a > 0$, $w_1(t) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(t)$

$\xi \neq 0$ $$\widehat{w_1}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi t}\, dt = \left[\frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi}\right]_{-a}^{a} = \boxed{\frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{i\xi}} \times \frac{2a}{2a}$$
$$= 2a\frac{\sin(a\xi)}{a\xi} = 2a\,\mathrm{sinc}(a\xi)$$

$\xi = 0$ $$\widehat{w_1}(0) = \int_{-a}^{a} dt = 2a$$

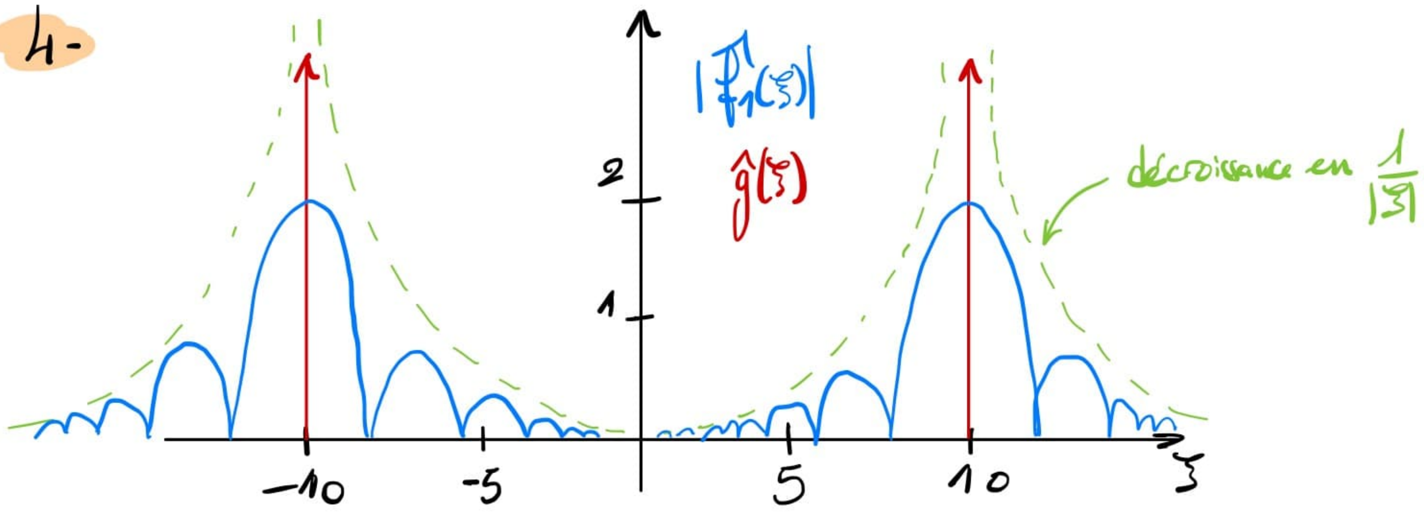
$|\widehat{w_1}(\xi)| \leq \frac{2}{\xi} \Rightarrow$ décroissance en $\frac{1}{\xi}$ en $|\xi| \to +\infty$.

3- $f_1(t) = w_1(t)\, g(t)$ $\qquad \hat{f_1}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\, \hat{w_1} * \hat{g}(\xi)$

$$\hat{f_1}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\left(2a\, \mathrm{sinc}(a\xi) * \pi\left(\delta(\xi-\lambda)+\delta(\xi+\lambda)\right)\right)$$

$$= a\, \mathrm{sinc}(a(\xi-\lambda)) + a\, \mathrm{sinc}(a(\xi+\lambda))$$

4-



5- $W_2(t) = \frac{W_1(t)}{2} + \frac{W_1(t)\cos(\pi t/a)}{2}$

$$\hat{W_2}(\xi) = \frac{\hat{W_1}(\xi)}{2} + \frac{1}{2\pi}\, \frac{\hat{W_1} * \pi\left(\delta(\xi-\pi/a)+\delta(\xi+\pi/a)\right)}{2}$$

$$= \frac{\hat{W_1}(\xi)}{2} + \frac{1}{4}\hat{W_1}(\xi-\pi/a) + \frac{1}{4}\hat{W_1}(\xi+\pi/a)$$

$$= \frac{2a\, \mathrm{sinc}(a\xi)}{2} + \frac{2a\, \mathrm{sinc}(a(\xi-\pi/a))}{4} + \frac{2a\, \mathrm{sinc}(a(\xi+\pi/a))}{4}$$

$$= a\,\frac{\sin(a\xi)}{a\xi} + \frac{a\sin(a\xi-\pi)}{2(a\xi-\pi)} + \frac{a\sin(a\xi+\pi)}{2(a\xi+\pi)}$$

$$= \frac{\sin(a\xi)}{\xi} - \frac{\sin(a\xi)}{2(\xi-\pi/a)} - \frac{\sin(a\xi)}{2(\xi+\pi/a)}$$

$$= \frac{\sin(a\xi)}{2}\left(\frac{2}{\xi} + \frac{1}{\pi/a-\xi} - \frac{1}{\pi/a+\xi}\right)$$

$$= \frac{\sin(a\xi)}{2}\left(\frac{2(\pi/a-\xi)(\pi/a+\xi) + \xi(\pi/a+\xi) - \xi(\pi/a-\xi)}{\xi(\pi/a-\xi)(\pi/a+\xi)}\right)$$

$$= \frac{\sin(a\xi)}{2}\left(\frac{2\pi^2/a^2 - 2\xi^2 + 2\xi^2}{\xi(\pi/a-\xi)(\pi/a+\xi)}\right) = \frac{\pi^2}{a^2}\,\frac{\sin(a\xi)}{\xi(\pi/a-\xi)(\pi/a+\xi)}$$

$|\hat{W_2}(\xi)| \sim \frac{\pi^2}{a^2}\frac{1}{|\xi|^3}$ en $|\xi| \sim \infty \Longrightarrow$ $|\hat{W_2}|$ est une meilleure approximation de $|\hat{g}|$ que $|\hat{f_1}|$