I
LOGIQUE ÉLÉMENTAIRE

§ 1.1 Objectif, outils, et limites de la logique.

(1) Qu'est-ce que la logique ? Quelques points de vues.

§ 1.2 Outils de la logique : définition et propriétés

(1) Propositions (logiques)

(2) Introductions aux opérateurs

(3) La négation

(4) Les conjonctions

Exercices

1. Donner la table de vérité de l'opérateur $\mathbf{OU}_{exc}$.

2. Donner la table de vérité de $((p\,\mathbf{ET}\,q)\,\mathbf{OU}(\mathbf{NON}\,r))$.

3. Exprimer $p\,\mathbf{ET}\,q$ à l'aide d'une formule faisant intervenir seulement les opérateurs **OU** et **NON**.

4. Exprimer $p\,\mathbf{OU}\,q$ à l'aide d'une formule faisant intervenir seulement les opérateurs **NON** et **ET**.

5. Que dire de[1]

(i) $\mathbf{NON}(p_1\,\mathbf{OU}\,p_2\,\mathbf{OU}\ldots\mathbf{OU}\,p_n)$,
(ii) $\mathbf{NON}(p_1\,\mathbf{ET}\,p_2\,\mathbf{ET}\ldots\mathbf{ET}\,p_n)$.

(5) Clause de condition - Conditionnelles

Exercices

1. Donner de nouveaux exemples de **SI** – **ALORS** – impossibles dans le langage courant.

1. Les résultats attendus sont les lois dites de Morgan que l'on reverra plus tard.

(6) Les quantificateurs

Exercices

1. Trouver des propositions dont une formalisation serait :

(i) $(\forall x)(Gx\,\mathbf{OU}\,Fx)$.

(ii) $(\forall x)(Gx\,\mathbf{OU}\,Fx \to Tx)$.

(iii) $R\,\mathbf{ET}(\exists x)(Fx\,\mathbf{ET}\,Hx)$ (cet exemple montre qu'on peut combiner des propositions sans variables et des propositions avec variables (et quantificateurs).

(iv) $(\exists x)((Mx\,\mathbf{ET}\,Nx)\,\mathbf{ET}(\forall y)(My\,\mathbf{ET}\,By \to x = y))$.

2. Symboliser : *un entier est pair si et seulement si son dernier chiffre est 0,2,4,6 ou 8.*

3. Symboliser : *Tout entier dont le dernier chiffre est 6 est nécessairement pair.*

4. La formule $(\forall x)(\exists y)(Nxy\,\mathbf{ET}((\forall z)(z \neq x) \to \mathbf{NON}\,Nzy))$ ressemble beaucoup à celle obtenue dans l'exemple (E34) du cours. Etudier en quoi elle diffère pour trouver un énoncé proche de (E34) dont elle est une symbolisation.

5. Dans les formules ci-après, le domaine des variables est toujours l'ensemble formé des entiers 0,1,2,3 et 4. La (ou les) variable(s) est (sont) donc toujours prise(s) dans un ensemble contenant seulement cinq éléments. On réutilise la notation 'd'. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

(i) $(\forall x)(\exists y)\ dyx$

(ii) $(\exists y)(\forall x)\ dyx$

(iii) $(\exists x)(\forall y)\ (\mathbf{NON}\,d2(x+y))$

(iv) $(\forall y)(\exists x)\ (\mathbf{NON}\,d2(x+y))$

(v) $(\forall x)(\forall y)\ (dxy\,\mathbf{OU}\,dyx)$

(vi) $(\forall x)(\forall y)\ (dxy\,\mathbf{ET}\,dyx) \to (x = y)$

6. Dans les formules suivantes les variables x, y, z, désignent toujours un pays de l'Union Européenne (telle que définie au mois de Novembre 2004). Les variables représentées par une formes géométriques $\square$, $\triangle$, $\circ$ désigne une langue officielle de l'union européenne. On emploie les notations suivantes :

(1) Fxy pour dire que 'les pays x et y ont une frontière commune.

(2) Mx pour dire 'x possède un accès à la mer'

(3) $Lx\square$ pour dire '$\square$ est une langue officielle du pays x'.

(i) La lettre f désigne la France, i, l'Italie, a l'Autriche. Dire si les énoncés suivant sont vrais ou faux

(a) Ffi

(b) Mf
(c) $Ma\,\mathbf{OU}\,Fai$
(d) $(\forall x)(\exists y)Fxy$
(e) $(\forall x)((\exists y)Fxy) \to ((\exists y)(\exists z)(z \neq y)\,\mathbf{ET}\,Fxy\,\mathbf{ET}\,Fxz)$
(f) $(\forall x)((Fxa\,\mathbf{ET}\,Mx) \to (x = i))$
(g) $(\exists x)(\exists \Box)(\exists \circ)(\Box \neq \circ\,\mathbf{ET}\,Lx\Box\,\mathbf{ET}\,Lx\circ)$

(ii) Symboliser la phrase suivante : "Exceptés la Grande-Bretagne et l'Irlande, tous les pays de l'Union Européenne ont un voisin (un pays frontalier) dans l'Union Européenne". On utilisera g pour désigner la Grande-Bretagne et e pour désigner l'Irlande.

(iii) Plusieurs proposent comme solution de la question précédente :

$$(\forall x)((\exists y)Fxy \to ((x \neq g)\,\mathbf{ET}(x \neq e))).$$

Expliquer leur erreur.

(iv) Symboliser : "Les seuls pays de l'Union Européenne ayant le français comme langue officielle sont la France et la Belgique".

(v) Symboliser : "Les seules langues qui sont langues officielles d'au moins deux pays de l'Union européenne sont l'anglais, le français et l'allemand."

(7) Négation d'un énoncé faisant intervenir un quantificateur

1. Simplifier les formules suivantes

(i) $\mathbf{NON}[(\exists x)(Fx\,\mathbf{ET}\,\mathbf{NON}\,Gx)]$,
(ii) $\mathbf{NON}[(\forall x)(Ax \to Bx)]$,
(iii) $\mathbf{NON}[(\exists x)(Ex\,\mathbf{ET}\,Fx)]$,
(iv) $\mathbf{NON}[(\forall x)(\mathbf{NON}\,Ix\,\mathbf{OU}\,Jx)]$,
(v) $\mathbf{NON}[(\exists x)(Cx \to \mathbf{NON}\,Dx)]$.

§ 1.3 La déduction

(1) Formes élémentaires

(2) Approches à la définition d'une déduction complexe

Exercices

1. Formaliser le raisonnement suivant en précisant le type des déductions élémentaires utilisées. *Pierre a une angine. Il y a deux types d'angines : les angines d'origine bactérienne et les angines d'origine virale. On prescrit un* *antibiotique uniquement en présence d'une angine bactérienne. Un prélèvement a montré la présence de streptocoques. Le médecin a donc prescrit un antibiotique.*

2. Donner un exemple de raisonnement avec sa formalisation qui élimine deux possibilités parmi trois.

3. Trouver une autre argument qui aurait la même formalisation que celle du second exemple du cours.

4. Faire la démonstration et le schéma du théorème suivant : *le carré d'un nombre impair est toujours un nombre impair.*

(3) Reductio ad absurdum (déduction par l'absurde)

Enoncé du principe

Premier exemple

Deuxième exemple

Exercice

1. Montrer en utilisant un reductio ad absurdum la déduction $(p \to q) \models \mathbf{NON}(p\,\mathbf{ET}\,\mathbf{NON}\,q)$.

(4) Exemple de déduction complexe employant une autre déduction complexe

(5) Schéma général d'un argument

Exercices

1. Décomposer les déductions suivantes (autrement dit faire les schémas représentant toutes les étapes avec les explications correspondantes)

(i) $(p_1\,\mathbf{OU}\,p_2\,\mathbf{OU}\,p_3, p_3 \to r, \mathbf{NON}\,p_2, r \to s, \mathbf{NON}\,s) \models p_1$.

(ii) $(\mathbf{NON}\,p \to (q \to s), \mathbf{NON}\,p, q) \models s$

(iii) $(p \to q, p \to \mathbf{NON}\,q) \models \mathbf{NON}\,p$ (utiliser un RaA)

§ 1.4 Introduction au calcul des propositions

(1) Introduction

Lien avec la partie précédente

Les symboles $\wedge$, $\vee$, $\neg$ pour ET, OU et NON

Conditionnelle matérielle ($\implies$)

Tables de vérité des cinq opérateurs ($\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$)

Mise en garde

(2) Les formules

Définition

Exemples

Exercice

1. Aucun des énoncés suivant n'est une formule bien définie. Dites pourquoi.

(i) pq

(ii) $p \wedge q \vee r$

(iii) $(p \wedge q) \vee r$

(iv) $((p \implies r) \implies (q \implies r) \wedge (t \vee s)$

(v) $((p \wedge q) \vee r) \implies (r \wedge s))$

(3) Tautologies, contingence, inconsistance

Définition des tautologies (formules tautologiques)

Définition de la contingence (formules contingentes)

Définition de l'inconsistance

Exercice

1. Déterminer la nature (Taut., Cont., Inc) des formules suivantes

(i) $(p \implies (q \implies p))$

(ii) $(p \implies (p \wedge q))$

(iii) $((p \implies q) \implies (q \implies p))$

(iv) $(p \implies (\neg p \vee q))$

(v) $(((p \vee q) \wedge q) \wedge \neg p) \implies q)$

(vi) $(((p \implies q) \wedge (r \implies s)) \implies ((p \wedge r) \implies (q \vee s)$

(4) Formules équivalentes

Lois de De Morgan

Lois de commutativité

Lois d'associativité

Lois de distributivité

Lois de simplification

Application des lois précédentes à la simplification des formules

Exercices

1. Montrer que la formule suivante est une tautologie $((q \implies r) \implies ((p \vee q) \implies (p \vee r)))$.

2. L'expression suivante *stricto sensu* n'est pas une formule (pourquoi ?). Pourquoi peut-on l'accepter (pour quoi n'y a-t-il d'ambiguïté sur son "sens") ? $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$. Montrer que la formule bien formée qui lui correspond est une tautologie.

3. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies en utilisant la technique des tables de vérité ou la technique des formules équivalentes.

(i) $((p \wedge p) \vee \neg q) \iff (p \wedge \neg q))$

(ii) $\phi_1 \iff \phi_2$ avec $\phi_1 = \neg(p \wedge \neg(q \wedge r))$ et $\phi_2 = (\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge \neg r))$.

(5) Déduction

Exercice

1. Vérifier la validité des déductions suivantes :

(i) $((p \implies q) \implies p) \models p$

(ii) $(p \implies (q \implies r)) \models ((p \implies q) \implies (p \implies r))$

(iii) $(p \implies (q \implies r) \models ((p \wedge q) \implies r)$

II

LA QUESTION DE L'INDUCTION

§ 2.1 Les énoncés de probabilité (statistiques)

(1) Enoncés ouverts

(2) Enoncés fermés

(3) Explication des notions sous-jacentes

Echantillon (cohorte, panel)

Evènement / la "propriété" mesurée

Probabilités

Traductions des exemples précédents

(4) La notion de moyenne

(5) Quelle est l'information donnée par un énoncé de probabilité?

Pour un membre de l'échantillon

La conclusion tirée en dehors de l'échantillon. Les deux a-priori de l'application des probabilités

(6) Difficulté dans l'analyse d'un énoncé probabiliste

La fausse interprétation causale.

(7) Confrontation avec une explication de type déductiviste

(8) A quoi peuvent servir les données statistiques ?

§ 2.2 L'idée de l'induction. Sa réfutation.

(1) Définition et critique

Deux exemples

Définition classique

Définition probabiliste

Définition minimale

(2) Les conjectures scientifiques comme purs actes créatifs

(3) A quoi peut servir l'expérience / le particulier

La notion de corroboration

La notion de falsifiabilité

§ 2.3 Relations

(1) Définition

(2) Représentations

(3) Propriétés remarquables

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

(4) Les relations d'ordre

(5) Les relations d'équivalence

Définition

Exemples

Notion de classe d'équivalence

Illustration : construction de l'ensemble des nombres rationnels (des "fractions")

(6) La relation d'équivalence " $\iff$ *" sur l'ensemble des formules (logiques)*

Les quatre classes d'équivalence sur l'ensemble des formules construites avec une proposition élémentaire

Les seize classes d'équivalence sur l'ensemble des formules construites avec deux propositions élémentaires

Exemples de recherches de formules équivalentes sans l'emploi des tables de vérité

1. Parmi les formules suivantes certaines sont équivalentes à $(p \wedge q) \implies r$ et d'autres à $(p \vee q) \implies r)$. Dites lesquelles ?
(i) $p \implies (q \implies r)$,
(ii) $q \implies (p \implies r)$,
(iii) $(p \implies r) \wedge (q \implies r)$,
(iv) $(p \implies r) \vee (q \implies r)$.

2. Trouver une formule, la plus simple possible, équivalente à $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$.

3. Déterminer les formules équivalentes parmi les suivantes :
(i) $p \implies q$,
(ii) $\neg p \implies \neg q$,
(iii) $\neg p \implies q$,
(iv) $q \implies p$,
(v) $\neg q \implies \neg p$,
(vi) $\neg q \implies p$.