Calcul différentiel
L3 MAPI
Jean-Paul Calvi

Test d'évaluation des prérequis
2008

NOM :

PRÉNOM :

Ce test a pour but détecter les étudiants qui doivent suivre le cours de soutien et ceux qui en seront dispensés. Il porte sur les questions d'analyse et d'algèbre linéaire élémentaire liées au programme du module de calcul différentiel. Les prérequis de topologie, revus au premier semestre, ne sont pas testés.

NOTE :

Université Paul Sabatier

1

a) Donner la définition du nombre dérivé $f'(a)$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. b) Quelle est l'équation de la tangente au graphe d'une fonction f en un point a ? c) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Peut-on parler de la dérivée de f en a ?

Réponse :

2

On suppose que la composée $g \circ f \circ h$ de trois fonctions dérivables est bien définie, quelle est sa dérivée ?

Réponse :

3

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction s_n définie par $s_n(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x^n$ si $x \geq 0$. A quelle(s) condition(s) la fonction s_n est-elle de classe C^k sur $\mathbb{R}$?

Réponse :

4

Soit $f(x) = x^3/2 - 5x^2 + 3$. Déterminer $f([-2{,}9])$.
Réponse :

5

Soient a et b des constantes réelles. On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$. Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.
Réponse :

6

Quelle est le polynôme de Taylor en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = x^4$. Que pouvez-vous dire de la différence entre f et ce polynôme de Taylor ?
Réponse :

7

Quelle est la définition de la fonction arcsin et calculer sa dérivée à partir de cette définition ?

Réponse :

8

Montrer que si f est une fonction paire dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f' est une fonction impaire.

Réponse :

9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue sur $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. A quelle condition existe-t-il un intervalle I_a de centre a telle que la restriction de f à I_a soit une bijection de I_a sur $f(I_a)$.

Réponse :

10

Énoncer le théorème de Rolle. Énoncer le théorème des accroissements finis.
Réponse :

11

Donner, sans démonstration, une formule exprimant la dérivée n-ième d'un produit fg en fonction des dérivées de f et de g?
Réponse :

12

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f'(x) \geq 0$ sur $]a,b[$ alors f est croissante sur $[a,b]$: démontrer ce résultat.
Réponse :

13

Démontrer que si un polynôme p de degré n admet n racines réelles simples dans $[a,b]$ alors son polynôme dérivé p' admet $n-1$ racines réelles dans $[a,b]$.

Réponse :

14

Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour que x_0 soit un maximum local de f il faut et il suffit que $f'(x_0) = 0$: vrai (preuve) ou faux (contrexemple).

Réponse :

15

Énoncer un théorème donnant des conditions pour que la limite f d'une suite de fonctions (f_n) soit dérivable.

Réponse :

16

Soit f une fonction continûment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer, en fonction de f' les dérivées partielles $\partial g/\partial x$ et $\partial g/\partial y$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f(x \exp(xy^2))$.

Réponse :

17

Soit $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Rappeler la formule donnant les dérivées partielles (du premier ordre) de $f \circ g$ en fonction des dérivées partielles de f et de g.

Réponse :

18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \exp(x^2 - y^2) \cdot \cos(2xy)$. Montrer que $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = 0$.

Réponse :

19

Donner la définition a) d'une application linéaire b) d'une base (d'un espace vectoriel) c) du rang d'une application linéaire.

Réponse :

20

Soient P_n l'espace des vectoriels de degré $\leq n$ et a_i, $i = 1, \ldots, k$ des réels. Quel est la dimension de P_n ? Montrer que l'application $\Phi : p \in P_n \to (p(a_1), \ldots, p(a_k)) \in \mathbb{R}^k$ est une application linéaire.

Quelle est la matrice de ϕ si on utilise la base canonique de P_n, $(1,x,x^2,\ldots)$, et la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

Réponse :

21. $\leftarrow$ 20

A quelle(s) condition(s) (portant sur les a_i's) l'application Φ est-elle un isomorphisme.
Réponse :

22

Qu'est ce que l'inégalité de Cauchy Schwarz?
Réponse :

23

En quoi est-il utile de connaître le noyau d'une application linéaire?
Réponse :

24

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carées d'ordre n. Dites si les applications suivantes sont linéaires : a) $A \in M_n(\mathbb{R}) \to \det(A)$, b) $A \in M_n(\mathbb{R}) \to A + I$ (I est la matrice identité), c) $A \in M_n(\mathbb{R}) \to tr(A)$ ($tr(A)$ est donné par la somme des éléments sur la diagonale).

Réponse :

25

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel. Donnez-en une base.

Réponse :