Calcul différentiel
L3 MAPI
Jean-Paul Calvi

Contrôle terminal du soutien de Calcul différentiel.
2008

NOM :

PRÉNOM :

NOTE :

Université Paul Sabatier

1

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant x_0. Montrer à partir de la définition du nombre dérivé que $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$.

Réponse :

2

Donner l'énoncer en précisant clairement les hypothèses a) du théorème de Rolle b) du théorème des accroissements finis. c) Illustrer chacun des deux théorème par un schéma.

Réponse :

3

(a) Donner la définition précise (avec un ϵ) d'un maximun local strict. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. (b) Montrer à partir de cette définition que si f admet un maximum local en x_0 et g admet un maximum local strict en x_0 alors $f + g$ admet un extremum local strict en x_0.

Réponse :

4

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle ouvert I, $x \in I$ et $a \in I$. Démontrer par récurrence sur n, la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = f(a) + f(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Réponse :

5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Réponse :

6

Dites, suivant les valeurs des paramètres α, β et γ, si l'ensemble des solutions du système suivant forme un plan, une droite où est vide,

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 3 \\ x + \beta y + z = 2 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

Réponse :