Calcul Différentiel[1]

Contrôle terminal du 21 mai 2008

durée : 2 heures

Nota bene. Aucun document n'est autorisé. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

1. Question de cours (2 pts)

Démontrer le théorème suivant qui donne le lien entre les dérivées directionnelles et la différentielle d'une fonction. E et F sont des espaces vectoriels normés et Ω est un ouvert non vide de E.

Théorème 1. *Soit $v \in E$ et $f : \Omega \subset E \to F$. Si f est différentiable en $a \in \Omega$ alors la dérivée de f suivant v en a, $D_v f(a)$, existe et*

$$D_v f(a) = df(a)(v). \tag{E1}$$

2. Question de cours (6 pts)

Démontrer le théorème suivant lorsque $I = [a,b]$ et $t_0 = a$ en utilisant le théorème du point fixe.

Théorème 2 (de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E \to F$, et $y_0 \in F$. Si f est continue sur $I \times E$ et s'il existe $L \in \mathbb{R}^+$ satisfaisant*

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_F \leq L\,\|y - z\|_E, \quad t \in I,\, y, z \in E \tag{E2}$$

alors l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y'(t_0) = y_0. \end{array} \right. \tag{E3}$$

admet une et une seule solution sur I.

---

3. Exercice (3 pts)

On note par $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire ordinaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. On définit F sur $\mathbb{R}^n$ par la relation $F(x) = f(\langle \lambda, x\rangle)$. Montrer que F est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et calculer une expression de sa différentielle en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en fonction de f et de λ. Le fonction F peut-elle admettre un extremum local strict en un point x_0 de $\mathbb{R}^n$?

---

4. Exercice (4 pts)

Déterminer la plus grande valeur que peut prendre la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xyz$ sur le sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On précisera en quel(s) point(s) le maximum est atteint. Établir un résultat similaire sur la sphère de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

---

1. Licence MAPI (3-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III)*. Année scolaire 2007-2008

5. Exercice (5 pts)

Soit E un espace de Banach, $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue et $L : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. On considère l'application f définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ par la relation

$$f(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - L(x).$$

5.1. Démontrer, en détaillant le raisonnement et le calcul, que si f admet un extremum local en $a \in E$ alors

$$\forall h \in E \quad B(a,h) = L(h). \tag{E4}$$

5.2. On suppose maintenant que la forme bilinéaire B est positive. Cela signifie que $B(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$. On suppose en outre que *la condition (E4) est satisfaite.*

(1) Montrer, à partir de la relation $B(a-h, a-h) \geq 0$, que

$$\forall h \in E \quad -B(a,a) \leq B(h,h) - 2L(h).$$

(2) Montrer que f admet un minimum global en a, c'est-à-dire $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$.

FIN