Calcul Différentiel[1]

Contrôle partiel du 10 mars 2008

durée : 2 heures

Nota bene. Aucun document n'est autorisé. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

1. Question de cours (3 pts)

Démontrer le théorème suivant. On rappellera explicitement la définition de la différentiabilité.

Théorème 1 (Linéarité de la différentiabilité). *Soient $a \in \Omega \subset E$, f et g deux fonctions définies sur Ω à valeurs dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g dont différentiables en a alors $f + \lambda g$ est différentiable en a et*

$$d(f + \lambda\, g)(a) = df(a) + \lambda\, dg(a). \tag{E1}$$

Réponse :

Le fait que f et g soient différentiables en a nous donne l'existence des applications 'restes' R_f et R_g telles que

$$f(a+h) - f(a) - df(a)(h) = R_f(h) \text{ et } g(a+h) - g(a) - dg(a)(h) = R_g(h), \tag{E2}$$

avec $\lim_{h\to 0} \|R_f(h)\|/\|h\| = 0 = \lim_{h\to 0} \|R_g(h)\|/\|h\|$. On en déduit que

$$(f + \lambda g)(a+h) - (f+\lambda g)(a) - (df(a) + \lambda dg(a))(h) = R_f(h) + \lambda R_g(h). \tag{E3}$$

Or, on a

$$\|R_f(h) + \lambda R_g(h)\|/\|h\| \leq \|R_f(h)\|/\|h\| + |\lambda|\|R_g(h)\|/\|h\|,$$

et le terme de droite tend vers 0 lorsque $h \to 0$ comme somme de deux termes de limite nulle. Il en est donc aussi de même de $\|R_f(h) + \lambda R_g(h)\|/\|h\|$ et cela montre que $f + \lambda g$ est différentiable en a de différentielle l'application linéaire $df(a) + \lambda dg(a)$ (qui est continue comme combinaison linéaire d'application linéaires continues).

Barème : 3 points.

2. Question de cours (5 pts)

Démontrer le théorème suivant lorsque F est munie d'une norme induite par un produit scalaire. On précisera clairement les théorèmes utilisés.

Théorème 2 (des accroissements finis ou de la moyenne). *Soient $a, b \in \Omega \subset E$. Supposons que le segment $[a,b]$ soit contenu dans Ω et que la fonction $f : \Omega \to F$ soit différentiable en tout point de $]a,b[$. Si de plus, $\|df(x)\| \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$ alors*

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq M\|b-a\|_E. \tag{E4}$$

Réponse :

Notons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la norme de F. Nous définissons la fonction g définie sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par la formule

$$g(t) = \langle f(b) - f(a), f(a + t(b-a)) \rangle.$$

L'application g peut se décomposer comme suit

$$g = t \xrightarrow{\mu} a + t(b-a) \xrightarrow{f} f(a+t(b-a)) \xrightarrow{\phi} \langle f(b) - f(a), f(a+t(b-a))\rangle,$$

et $g = \phi \circ f \circ \mu$ est continue comme composée de fonctions continues (μ est affine et ϕ est linéaire continue). Elle est aussi dérivable en $t \in]0,1[$ et on a, en utilisant le théorème sur la composée des fonctions différentiables, et le fait

[1] Licence MAPI (3-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III).* Année scolaire 2007-2008

que $d\phi(x) = \phi$ (ϕ linéaire), $d\mu(t)(h) = h(b-a)$ (μ est la constante a plus l'application linéaire $t \to t(b-a)$)

$$g'(t) = dg(t)(1) = (\phi \circ df(a+t(b-a)))(1.(b-a)) = \langle f(b)-f(a), df(a+t(b-a))(b-a)\rangle.$$

Maintenant, en appliquant le théorème des accroissements finis pour la fonction réelle de la variable réelle g on obtient l'existence de $c \in]0,1[$ tel que $g(1)-g(0) = g'(c)$. Comme $g(0) = \langle f(b)-f(a), f(a)\rangle$ et $g(1) = \langle f(b)-f(a), f(b)\rangle$, on obtient en utilisant la formule pour $g'(c)$,

$$\begin{aligned}
\|f(b)-f(a)\|^2 &= g(1)-g(0) && \text{(E5)}\\
&= g'(c) && \text{(E6)}\\
&= \langle f(b)-f(a), df(a+c(b-a))(b-a)\rangle && \text{(E7)}\\
&\leq \|f(b)-f(a)\| \|df(a+c(b-a))(b-a)\| && \text{(inégalité de Cauchy)} \quad \text{(E8)}\\
&\leq \|f(b)-f(a)\| \|df(a+c(b-a))\| \|b-a\| && \text{(norme d'une appl. linéaire)} \quad \text{(E9)}\\
&\leq \|f(b)-f(a)\| M \|b-a\| && \text{(hyp. sur } df\text{).} \quad \text{(E10)}
\end{aligned}$$

L'inégalité demandée s'en déduit immédiatement sauf si $f(b) = f(a)$ auquel cas elle est évidente.
Barème : 5 points.

3. Problème (14 pts)

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n , $n \geq 2$, à coefficients réels que l'on munit d'une norme notée $\|\cdot\|$. Nous supposons que cette norme est multiplicative, cela signifie que pour toutes matrices A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ on a $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

3.1. **(4 pts).** On définit l'application b sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ par la relation $b(X,Y) = X \cdot Y$, autrement dit $b(X,Y)$ est le produit matriciel de X par Y. L'espace $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme produit : $\|(A,B)\| = \max(\|A\|, \|B\|)$.

(1) Montrer que b est une application bilinéaire sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$. Est-elle symétrique ?
Réponse :

Soient $X, X', Y, Y' \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
b(\alpha X + \beta X', Y) &= (\alpha X + \beta X') \cdot Y && \text{(E11)}\\
&= \alpha X \cdot Y + \beta X' \cdot Y = \alpha b(X,Y) + \beta b(X',Y). && \text{(E12)}
\end{aligned}$$

On démontre de la même manière

$$b(X, \alpha Y + \beta Y') = \alpha b(X,Y) + \beta b(X,Y'),$$

ce qui montre que b est bilinéaire. Elle n'est pas symétrique car le produit matriciel n'est pas commutatif.

Barème : 1 point.

(2) Montrer que b est différentiable en $(A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle en (A,B). *Réponse* :

Soient $\mathcal{A} = (A_1, A_2) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H} = (H_1, H_2) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$, nous avons, en utilisant que b et bilinéaire,

$$\begin{aligned}
b(\mathcal{A} + H) &= b(A_1 + H_1, A_2 + H_2) && \text{(E13)}\\
&= b(A_1, A_2) + b(A_1, H_2) + b(H_1, A_2) + b(H_1, H_2) && \text{(E14)}\\
&= b(A_1, A_2) + A_1 H_2 + H_1 A_2 + H_1 H_2. && \text{(E15)}
\end{aligned}$$

Comme l'application $\mathcal{H} = (H_1, H_2) \to A_1 H_2 + H_1 A_2$ est linéaire, pour montrer que b et différentiable en $\mathcal{A}$ et établir que

$$db(A_1, A_2)(H_1, H_2) = A_1 H_2 + H_1 A_2,$$

il suffit de vérifier que la fonction $R(H_1, H_2) = H_1 H_2$ satisfait

$$\lim_{(H_1,H_2)\to(0,0)} \|R(H_1, H_2)\|/\|(H_1, H_2)\| = 0.$$

Or ceci est immédiat car

$$\|R(H_1, H_2)\| \le \|H_1\|\|H_2\| \le \|\mathcal{H}\|\|\mathcal{H}\|$$

et

$$\|R(H_1, H_2)\|/\|(H_1, H_2)\| \le \|\mathcal{H}\| \to 0 \quad ((H_1, H_2) \to (0, 0)).$$

Barème : 2 points.

(3) En déduire la différentielle en A de l'application $P_2 : X \in M_n(\mathbb{R}) \to X^2 \in M_n(\mathbb{R})$. On utilisera le fait que $P_2 = b \circ \Phi$ avec $\Phi : X \in M_n(\mathbb{R}) \to (X, X) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$. *Réponse* :

En utilisant le théorème sur la composer des fonctions différentiable, on obtient

$$dp_2(A) = db(A, A) \circ d\phi(A).$$

Or l'application ϕ étant linéaire on a $d\phi(A) = A$. Finalement, en utilisant le calcul précédent sur la différentielle de b,

$$dp_2(A)(H) = (db(A, A) \circ \phi)(H) = db(A, A)(H, H) = AH + HA.$$

Barème :1 point.

3.2. **(4 pts).** Soit $k \ge 2$. On définit l'application $P_k : X \in M_n(\mathbb{R}) \to X^k \in M_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer, par récurrence sur sur k que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ alors

$$dP_k(A)(H) = \sum_{i=1}^{k} A^{i-1} H A^{k-i} \tag{E16}$$

$$= HA^{k-1} + AHA^{k-2} + A^2HA^{k-3} + \cdots + A^{k-2}HA + A^{k-1}H. \quad \text{(2 pts)} \tag{E17}$$

Réponse :

Pour $k = 2$ la formule a été démontrée dans une question précédente. Nous supposons qu'elle est vraie pour k et nous la montrons pour $k + 1$. Nous utilisons $P_{k+1}(X) = b(P_k(X), X)$. Autrement dit, $P_k = b \circ \Psi$ avec $\Psi(X) = (P_k(X), X)$. Remarquons d'abord, en différentiant coordonnée par coordonnée, que

$$d\Psi(A)(H) = \big(dP_k(A)(H), H\big).$$

En utilisant le théorème sur la composée des fonctions différentiables ainsi que le calcul déjà fait sur la différentielle de b, nous obtenons

$$dP_{k+1}(A)(H) = db(P_k(A), A)\big(dP_k(A)(H), H\big) \tag{E18}$$

$$= P_k(A) \cdot H + dP_k(A)(H) \cdot A \tag{E19}$$

$$= \big(\sum_{i=1}^{k} A^{i-1}HA^{k-i}\big) \cdot A + A^k H \tag{E20}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} A^{i-1}HA^{k+1-i}. \tag{E21}$$

Ce qui achève la démonstration par récurrence.

Barème : 2 points .

(2) Trouver une majoration dépendant de k et de $\|A\|$ pour la norme de l'application linéaire $dP_k(A)$. *Réponse* :

A partir de

$$\|A^{i-1}HA^{k-i}\| \leq \|A\|^i\|H\|\|A\|A^{k-i} = \|A\|^{k-1}\|H\|$$

on obtient

$$\|dP_k(A)(H)\| \leq \sum_{i=1}^{k} \|A\|^{k-1}\|H\| \leq k\|A\|^{k-1}\|H\|$$

d'où l'on déduit $\|dP_k(A)\| \leq k\|A\|^{k-1}$.

Barème : 1 point.

(3) Montrer que pour toput $k \geq 1$ et toutes matrices X, Y dans $M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|X^k - Y^k\| \leq k\max(\|X\|, \|Y\|)^{k-1}\|X - Y\|.$$

Réponse :

Une application du théorème des accroissements finis donne :

$$\begin{aligned}
\|X^k - Y^k\| &= \|P_k(X) - P_k(Y)\| && \text{(E22)}\\
&\leq \sup_{C\in]X,Y[} \|dP_k(C)\|\|X - Y\| && \text{(E23)}\\
&\leq \sup_{C\in]X,Y[} k\|C\|^{k-1}\|X - Y\| && \text{(E24)}\\
&\leq k\max(\|X\|, \|Y\|)^{k-1}\|X - Y\|. && \text{(E25)}
\end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité on a utilisé le fait que $C \in]X, Y[$ entraîne l'existence de $t \in]0, 1[$ tel que $C = tX + (1-t)Y$ ce qui implique $\|C\| \leq t\|X\| + (1-t)\|Y\| \leq (t + (1-t))\max(\|X\|, \|Y\|) = \max(\|X\|, \|Y\|)$.

Barème : 1 point.

3.3. **(6 pts).** On note $S_k = Id + \sum_{i=1}^{k} P_i$. L'application S_k est donc une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit $R \in]0, 1|$. Montrer que la suite S_k est uniformément convergente sur la boule $B_f(0, R) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \|X\| \leq R\}$. On rappelle que pour montrer cette uniforme convergence, il suffit d'établir que la série de terme général $\sup\{\|P_k(X)\| \ : \ X \in B(0, R)\}$ est convergente.

Réponse :

$\|P_k(X)\| \leq \|X\|^k \implies sup\{\|P_k(X)\| \ : \ X \in B(0, R)\} \leq R^k$ qui est le terme général d'une série convergente puisque $R < 1$.

Barème : 1 point

(2) Soit ϕ la limite de la suite S_k. Montrer que ϕ est différentiable sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 et déterminer la différentielle de ϕ.

Réponse :

Il suffit de démontrer que la fonction est différentiable sur toute boule ouverte $B(0, R)$, $R < 1$. Cela résulte d'une application directe du théorème du cours sur les suites de fonctions différentiables car nous avons déjà que la suite de fonctions est uniformément convergente (donc simplement convergente en un point !) et la suite des différentielles est aussi elle-même uniformément convergente sur $B(0, R)$. En effet, d'après une inégalité montrée dans une question précédente, nous avons

$$\|dP_k(A)\| \leq k\|A\|^k \leq kR^k$$

qui est le terme général d'une série convergente car $R < 1$.

Nous avons

$$d\phi(A)(H) = \sum_{k=0}^{\infty} dP_k(A)(H) = \cdots .$$

Barème : 2 points

(3) Calculer $S_k(X)(Id - X)$ et en déduire que pour toute matrice X avec $\|X\| < 1$ on a $\phi(X) = (Id - X)^{-1}$. *Réponse :*

On vérifie très facilement $S_k(X)(Id - X) = Id - X^{k+1}$. En passant à la limite lorsque $k \to \infty$ et en utilisant le fait que $\S_k(X) \to \phi(X)$ et $X^k \to 0$ car $\|X^k\| \to 0$ car $\|X\| < 1$, on obtient $\phi(X)(Id - X) = Id$ d'où l'on tire $\phi(X) = (Id - X)^{-1}$.

Barème : 1 pt

(4) Montrer que pour toutes matrices X et Y de normes < 1, on a

$$\|(Id - X)^{-1} - (Id - Y)^{-1}\| \leq \frac{2\|X - Y\|}{\Big(1 - \max(\|X\|, \|Y\|)\Big)^2}.$$

Réponse :

d'après le théorème des accroissements finis Et la question précédente, nous avons

$$\begin{aligned} \|(Id - X)^{-1} - (Id - Y)^{-1}\| &= \|\phi(X) - \phi(Y)\| && \text{(E26)} \\ &\leq \sup_{C \in]X,Y[} \|d\phi(C)\| \, \|X - Y\|. && \text{(E27)} \end{aligned}$$

Or

$$\|d\phi(C)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} dP_k(C)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} k\|C\|^{k-1} = \frac{2}{(1 - \|C\|)^2}$$

l'inégalité demandée s'en déduit en remarquant que

$$C \in]X, Y[\implies \|C\| \leq \max(\|X\|, \|Y\|) \implies \frac{2}{(1 - \|C\|)^2} \leq \frac{2}{\Big(1 - \max(\|X\|, \|Y\|)\Big)^2}.$$

Pour

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\|C\|^{k-1} = \frac{2}{(1 - \|C\|)^2}$$

on a utilisé le fait que $\sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1}$ est la dérivée de $1/(1-t)$ et vaut donc $2/(1-t)^2$.

Barème : 2 points

FIN