Calcul Différentiel[1]

Contrôle partiel du 10 mars 2008

durée : 2 heures

Nota bene. Aucun document n'est autorisé. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

1. Question de cours (3 pts)

Démontrer le théorème suivant. On rappellera explicitement la définition de la différentiabilité.

Théorème 1 (Linéarité de la différentiabilité)**.** *Soient $a \in \Omega \subset E$, f et g deux fonctions définies sur Ω à valeurs dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g dont différentiables en a alors $f + \lambda g$ est différentiable en a et*

$$d(f + \lambda\, g)(a) = df(a) + \lambda\, dg(a). \tag{E1}$$

2. Question de cours (5 pts)

Démontrer le théorème suivant lorsque F est munie d'une norme induite par un produit scalaire. On précisera clairement les théorèmes utilisés.

Théorème 2 (des accroissements finis ou de la moyenne)**.** *Soient $a,b \in \Omega \subset E$. Supposons que le segment $[a,b]$ soit contenu dans Ω et que la fonction $f : \Omega \to F$ soit différentiable en tout point de $]a,b[$. Si de plus, $\|df(x)\| \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$ alors*

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq M\|b - a\|_E. \tag{E2}$$

---

3. Problème (14 pts)

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, $n \geq 2$, à coefficients réels que l'on munit d'une norme notée $\|\cdot\|$. Nous supposons que cette norme est multiplicative, cela signifie que pour toutes matrices A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ on a $\|A \cdot B\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

3.1. **(4 pts).** On définit l'application B sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ par la relation $B(X,Y) = X \cdot Y$, autrement dit $B(X,Y)$ est le produit matriciel de X par Y. L'espace $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme produit : $\|(A,B)\| = \max(\|A\|,\|B\|)$.

(1) Montrer que B est une application bilinéaire sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$. Est-elle symétrique ?
(2) Montrer que B est différentiable en $(A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle de B en (A,B).
(3) En déduire la différentielle en A de l'application $P_2 : X \in M_n(\mathbb{R}) \to X^2 \in M_n(\mathbb{R})$. On utilisera le fait que $P_2 = B \circ \Phi$ avec $\Phi : X \in M_n(\mathbb{R}) \to (X,X) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

1. Licence MAPI (3-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III)*. Année scolaire 2007-2008

3.2. **(4 pts).** Soit $k \geq 2$. On définit l'application $P_k : X \in M_n(\mathbb{R}) \to X^k \in M_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer, par récurrence sur sur k que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ alors

$$dP_k(A)(H) = \sum_{i=1}^{k} A^{i-1} H A^{k-i} \tag{E3}$$

$$= HA^{k-1} + AHA^{k-2} + A^2HA^{k-3} + \cdots + A^{k-2}HA + A^{k-1}H. \quad \text{(2 pts)} \tag{E4}$$

(2) Trouver une majoration dépendant de k et de $\|A\|$ pour la norme de l'application linéaire $dP_k(A)$.

(3) Montrer que pour tout $k \geq 1$ et toutes matrices X, Y dans $M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|X^k - Y^k\| \leq k \max(\|X\|,\|Y\|)^{k-1} \|X - Y\|.$$

3.3. **(6 pts).** On note $S_k = Id + \sum_{i=1}^{k} P_i$. L'application S_k est donc une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit $R \in]0,1|$. Montrer que la suite S_k est uniformément convergente sur la boule $B_f(0,R) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \|X\| \leq R\}$. On rappelle que pour montrer cette uniforme convergence, il suffit d'établir que la série de terme général $\sup\{\|P_k(X)\| \ : \ X \in B(0,R)\}$ est convergente.

(2) Soit ϕ la limite de la suite S_k. Montrer que ϕ est différentiable sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 et déterminer la différentielle de ϕ.

(3) Calculer $S_k(X)(Id - X)$ et en déduire que pour toute matrice X avec $\|X\| < 1$ on a $\phi(X) = (Id - X)^{-1}$.

(4) Montrer que pour toutes matrices X et Y de normes < 1, on a

$$\|(Id - X)^{-1} - (Id - Y)^{-1}\| \leq \frac{2\|X - Y\|}{\Big(1 - \max(\|X\|,\|Y\|)\Big)^2}.$$

FIN