ALGEBRE[1]

Epreuve de septembre 2006

durée : 2 heures

Nota bene. On peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes. Le barème (approximatif) est 1 : 4 pts, 2 : 16 pts. Les notes de cours ainsi que le résumé polycopié du cours sont autorisés. L'usage de tout autre document est interdit. *Une réponse exacte sans justification ou avec une justification fausse ne rapportera aucun point.*

1

Déterminer tous les éléments du groupe de permutation $\mathbf{S}_5$ dont l'ordre soit égal à 6. Ces éléments forment-ils un sous-groupe de $\mathbf{S}_5$?

2

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau unitaire d'unité 1_A. Cet anneau n'est pas supposé commutatif ni intègre. On rappelle que $A^\star$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de A et que $(A^\star, \cdot)$ est un groupe. On introduit les deux définitions suivantes :

(1) On dit qu'un élément $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $a^k = 0_A$ où 0_A désigne l'élément neutre de la loi $+$.

(2) On dit que a est *unipotent* si $a = 1_A + \theta$ avec θ nilpotent.

2.1. Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents et unipotent de A lorsque

(1) A est un anneau *intègre*.

(2) $A = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$,

2.2. Plus généralement déterminer le cardinal de l'ensemble des éléments unipotents lorsque $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n = p^\alpha q^\beta$ où p et q sont deux nombres premiers (> 1) distincts et α et β sont des entiers strictement positifs.

2.3. Montrer que l'anneau des matrices réelles 2×2, $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ contient une infinité d'éléments unipotents.

Dans les deux parties suivantes (2.4 et 2.5) on étudie le cas général.

2.4. Montrer que si $\theta \in A$ alors

$$(1_A + \theta)[1_A - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \cdots + (-1_A)^{k-1}\theta^{k-1}] = 1_A - (-1_A)^k\theta^k.$$

On justifiera (associativité, distributivité, etc) toutes les lignes de calculs.

---

1. Licence de mathématiques (2-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III).* Année scolaire 2005-2006

2.5.

(1) Déduire de la question précédente que tout élément unipotent est inversible (autrement dit appartient à $A^\star$).

(2) Soit $\theta \in A$ comme dans la question précédente. On pose

$$\theta' = \sum_{n=1}^{k-1} (-1_A)^n \theta^n.$$

(a) Montrer que si $\theta^k = 0_A$ alors $\theta'^k = 0_A$.

(b) En déduire que si a est unipotent alors a^{-1} — qui existe d'après la question 1 — est aussi unipotent.

(3) Montrer que si A est commutatif alors l'ensemble des éléments unipotents de A forme un sous-groupe de $A^\star$. Ce groupe sera noté $U(A)$.

2.6. Montrer que $U(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z})$ est un groupe cyclique. En donner la table.

2.7. Soient $(A, +\,,\cdot)$ et $(B, +\,,\cdot)$ deux anneaux commutatifs unitaires.

(1) Montrer que si A et B sont isomorphes alors les groupes $U(A)$ et $U(B)$ sont aussi isomorphes.

(2) Déterminer $U(A \times B)$ où $A \times B$ désigne l'anneau produit habituel avec les lois $(a,b) + (a',b') = (a + a'\,, b + b')$ et $(a,b) \cdot (a',b') = (a \cdot a'\,, b \cdot b')$.

FIN

L'énoncé distribué aux étudiants comportait un typo, ici corrigé, dans la définition d'un élément unipotent qui rendait impossible la solution de quelques questions. Le barème a été modifié en conséquence.