

# ALGEBRE<sup>1</sup>

Examen du 2 septembre 2004

durée : 2 heures

---

Nota bene. Le barème (approximatif) est I : 2 pts, II : 7,5 pts et III : 11,5 pts. Les trois exercices sont indépendants. Il y a quelques questions très faciles destinées à guider l'intuition des candidats, elles rapporteront très peu de points. Les notes de cours sont autorisées. L'usage de tout autre document est interdit. Une réponse exacte sans justification ou avec une justification fautive ne rapportera aucun point. Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.

---

## I

On considère les polynômes  $P_1, P_2$  et  $P_3$  dans  $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})[X]$  définis par

$$P_1 = X^5 - \bar{1}X - \bar{1}, \quad P_2 = X^3 + X^2 + \bar{1} \quad \text{et} \quad P_3 = X^2 + X + \bar{1}.$$

Montrer que  $P_1 = P_2 \cdot P_3$ .

---

## II

A – a) On considère l'application  $\phi$  définie pour  $a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  par  $\phi(a) = \bar{2} \cdot a$ . Calculer les images des quatre éléments de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . L'application  $\Phi$  est-elle un endomorphisme du groupe  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ ? un automorphisme?

b) Déterminer tous les automorphismes de  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ .

B – Dresser la table du groupe  $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \cdot)$ .

(On rappelle que dans un anneau  $(A, +, \cdot)$ ,  $A^*$  désigne l'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication  $\cdot$ .)

C – Montrer que  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

D – Déterminer tous les isomorphismes de  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$  sur  $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \cdot)$ .

---

## III

On considère l'ensemble  $\mathbb{D}$  formé des nombres décimaux. De manière précise

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{m}{10^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Par exemple  $x = -5,5674 \in \mathbb{D}$  car  $x = \frac{-55674}{10^4}$ .

A – Montrer que  $\mathbb{D}$  est un sous-anneau (unitaire) de  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ .

B – Montrer que pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{Z}$  on a  $2^\alpha \cdot 5^\beta \in \mathbb{D}$ .

C – a) Les éléments suivants sont-ils inversibles (pour  $\cdot$ ) :  $\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5^2}$  ?

b) Déterminer l'ensemble  $\mathbb{D}^*$  formé de tous les éléments inversibles de  $\mathbb{D}$ .

---

1. Licence de mathématiques (2-ième année), Université Paul Sabatier (Toulouse III). Année scolaire 2003-2004

D – On rappelle que si  $a$  est un élément d'un anneau commutatif  $A$ ,  $(a)$  désigne l'idéal principal engendré par  $a$  c'est-à-dire  $(a) = \{ta : t \in A\}$ . Soient  $x, y \in \mathbb{D}$ . A quelle(s) condition(s) a-t-on  $(x) = (y)$ ?

E – On note  $(\frac{6}{5}, \frac{9}{2})$  l'ensemble défini par

$$\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{2}\right) =_{def} \left\{ t\frac{6}{5} + t'\frac{9}{2} : t, t' \in A \right\}.$$

a) Montrer que  $(\frac{6}{5}, \frac{9}{2})$  est un idéal de  $\mathbb{D}$ .

b) Trouver  $z$  tel que  $(\frac{6}{5}, \frac{9}{2}) = (z)$

F – Montrer plus généralement que tous les idéaux de  $I$  sont principaux autrement dit que  $\mathbb{D}$  est un anneau principal.

---

FIN