# ALGEBRE [1]

Epreuve de septembre 2005

durée : 2 heures

---

Les notes de cours sont autorisées. L'usage de tout autre document est interdit. Si le candidat trouve une erreur dans l'énoncé, il le note et l'explique sur sa copie puis continue à composer en admettant le résultat de la question.

---

## EXERCICE

Déterminer le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Ce groupe est-il cyclique?

---

## PROBLÈME

On considère $G$, l'ensemble des applications affines *bijectives* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est élément de $G$ lorsqu'elle est définie par une expression de la forme $f(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^\star$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Si nécessaire, on notera $f = f_{\alpha,\beta}$. En particulier l'application identité correspond à $f_{1,0}$.

On munit $G$ de la loi $\circ$ de composition des applications.

Toutes les réponses doivent être justifiées par un calcul ou une démonstration dont on donnera les détails.

---

**I —** Soient $f_{\alpha,\beta}$ et $f_{\alpha',\beta'}$ dans $G$.

(1) Trouver $\square$ et $\triangle$ tels que

$$f_{\alpha,\beta} \circ f_{\alpha',\beta'} = f_{\square,\triangle},$$

(2) Trouver $\square$ et $\triangle$ tels que

$$f_{\alpha,\beta}^{-1} = f_{\square,\triangle},$$

ici $f^{-1}$ désigne la bijection réciproque de l'application $f$.

(3) La loi $\circ$ sur $G$ est-elle commutative?

---

Dans toute la suite on utilisera que $(G,\circ)$ *est un groupe* (dont l'élément neutre est l'application identité). Cette propriété est admise, on ne demande pas de la démontrer. La loi $\circ$ est l'unique loi qui sera utilisée sur $G$, on omettra de la préciser par la suite.

**II —** Dans cette partie on étudie les liens entre les sous-groupes de $(\mathbb{C},+)$ et les sous-groupes de $G$.

(1) Soit $H_{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des éléments $g$ de $G$ qui sont de la forme $g(z) = z + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $H_{\mathbb{Z}}$ est un sous-groupe de $G$ qui est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$.

(2) Plus généralement, si $T$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$, montrer qu'il existe un sous-groupe $H_T$ de $G$ qui soit isomorphe à $T$.

[1] Licence de mathématiques (2-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III)*. Année scolaire 2003-2004

**III —** Dans cette partie on étudie les liens entre les sous-groupes de $(\mathbb{C}^\star,\cdot)$ et les sous-groupes de $G$.

(1) Soit $L$ un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\star,\cdot)$. Trouver un sous-groupe $H_L$ de $G$ qui soit isomorphe à $L$. Ce sous-groupe est-il un sous-groupe distingué de $G$ ?

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ donner un exemple de sous-groupe cyclique d'ordre $n$ de $G$. (On devra vérifier en détails que le sous-groupe proposé est cyclique d'ordre $n$. )

**IV —** Soit $A$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{C}$. On définit l'ensemble $G^A$ par la condition suivante

$$f \in G^A \iff f(A) = A,$$

Autrement dit $f \in G^A$ si l'image de tout élément de $A$ par $f$ est encore dans $A$ et si tout élément de $A$ est image par $f$ d'un élément de $A$.

(1) Montrer que $G^A$ est un sous-groupe de $G$.

(2) Soit $f \in G$. Quelle relation existe-t-il entre $G^{f(A)}$ et $G^A$ ?

(3) Déterminer $G^A$ lorsque $A = \{0\}$ et montrer que dans ce cas $G^A$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^\star,\cdot)$.

(4) Déterminer $G^A$ lorsque $A = \{0,1\}$.

(5) Trouver $A$ tel que $G^A$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$.

(6) Montrer que si $A = \mathbf{U}$ où $\mathbf{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module $1$ alors $G^A$ est isomorphe à $(\mathbf{U},\cdot)$. (On pourra utiliser un raisonnement géométrique : en quoi l'application $z \to \alpha z$ transforme-t-elle un cercle ? En quoi l'application $z \to z + \beta$ transforme-t-elle un cercle ?)

---

FIN