NOM DE L'ÉTUDIANT:

Prénoms :

Numéro de Carte d'étudiant :

ALGÈBRE FONDAMENTALE

ANNÉE SCOLAIRE 2005-2006

Epreuve tenant lieu de contrôle continu. Durée : 1 heure

Seules les justifications correctes rapporteront des points. Les étudiants répondront directement sur cette feuille en respectant l'espace réservé à la réponse. Le résumé polycopié et les notes de cours personnelles sont autorisés. Tout autre document est interdit.

---

$\boxed{1}$ Déterminer le sous-groupe de $\mathbf{U}_{16}$ engendré par $e^{4i\pi/16}$. [2pts]

*Réponse :* Soit $g = e^{4i\pi/16}$. On cherche le plus petit entier $n$ tel que $g^n = e$ $(n>0)$ et on aura alors $\langle g \rangle = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$. Or

$g^2 = e^{8i\pi/16}$, $g^3 = e^{12i\pi/16}$, $g^4 = e^{16i\pi/16}$, $g^5 = e^{20i\pi/16}$,

$g^6 = e^{24i\pi/16}$, $g^7 = e^{28i\pi/16}$, $g^8 = e^{32i\pi/16} = 1 \Rightarrow \underline{n=8}$.

---

$\boxed{2}$ Soit $(G,*_1)$, $(H,*_2)$ et $(W,*_3)$ trois groupes. On suppose que $\phi$ est un morphisme de $(G,*_1)$ dans $(H,*_2)$ et $\psi$ est un morphisme de $(H,*_2)$ dans $(W,*_3)$. On pose $f = \psi \circ \phi$. Montrer que $f$ est un morphisme de $(G,*_1)$ dans $(W,*_3)$. [2pts, toute égalité non justifiée = -0,5 pt]

*Réponse :* Soient $x, y \in G$, on doit montrer que

$f(x *_1 y) = f(x) *_3 f(y)$ or

$$
\begin{aligned}
f(x *_1 y) &= \Psi(\phi(x *_1 y)) && (\text{def de } f)\\
&= \Psi(\Phi(x) *_2 \Phi(y)) && (\Phi \text{ morph})\\
&= \Psi(\Phi(x)) *_3 \Psi(\Phi(y)) && (\Psi \text{ morph})\\
&= f(x) *_3 f(y) && (\text{def de } f).
\end{aligned}
$$

CQFD.

$\boxed{3}$ Soit $(G,*)$ un groupe. pour $g \in G$, on définit $S(g)$ comme étant l'ensemble des éléments $x$ de $G$ qui vérifient $x^{-1} * g * x = g$. Montrer que $S(g)$ est un sous-groupe de $G$. Quand a-t-on $S(g) = G$? [3pts]

$S(g) \neq \emptyset$ car $e \in S(g)$. En effet $e^{-1} * g * e = e * g * e = g$.

Montrons que si $x, y \in S(g)$ alors $x * y \in S(g)$.

On a $\boxed{(x*y)^{-1} * g * (x*y)} = (y^{-1} * x^{-1}) * g * (x*y)$ (propriété du sym)

$\boxed{=}\ y^{-1} * (x^{-1} * g * x) * y$ (asso)

$= y^{-1} * g * y$ ($x \in S(g)$)

$= \boxed{g}$ ($y \in S(g)$)

Montrons que si $x \in S(g)$ alors $x^{-1} \in S(g)$.

$(x^{-1})^{-1} * g * x^{-1} = g \iff x * g * x^{-1} = g$ $((x^{-1})^{-1} = x)$

$\iff g * x^{-1} = x^{-1} * g$ ($\times$ par $x^{-1}$)

$\iff g = x^{-1} * g * x$ VRAI car $x \in S(g)$

$S(g) = G \iff g \in Z(G)$ centre de $G$

$\boxed{4}$ Soit $\sigma$ la permutation de $S_7$ définie par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer $f^{50}$. [2pts]

*Réponse :*

$f = (13)(245)(67)$

$f^{50} = (13)^{50}(245)^{50}(67)^{50}$ (car support disjoints)

or $(13)^2 = Id \Rightarrow (13)^{50} = Id$

$(67)^2 = Id \Rightarrow (67)^{50} = Id$

$(245)^3 = Id \Rightarrow (245)^{50} = (245)^2 = (254)$

$\Rightarrow f^{50} = (254)$.

$\mathbb{R}^{*+}$ $\mathbb{R}^{*}$ $\mathbb{R}^{*}$

ERREUR D'ENONCÉ

$\mathbb{Q}$ doit être remplacé par $\mathbb{R}$.

$\boxed{5}$ Préciser et justifier l'énoncé suivant : en utilisant $f$ définie sur $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ par $f(x) = x^2$ on voit que $\mathbb{Q}^{*+}$ est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{Q}^*/\{-1,+1\}$. [3pts]

*Réponse :*

$$f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^{*+}, \cdot) \quad \text{est}$$
$$x \longmapsto x^2$$

un morphisme surjectif $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^{*+}$

donc (th)

$$\mathbb{R}^*/\ker f \simeq \mathbb{R}^{*+} = f(\mathbb{R}^*)$$

or $x \in \ker f \iff x^2 = 1 \iff x \in \{+1,-1\}$

et $\mathbb{R}^*/\ker f = \mathbb{R}^*/\{+1,-1\}$.

$\boxed{6}$ Déterminer le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Donner la table de ce groupe. A quel groupe est-il isomorphe? [4pts]

*Réponse :*

$\bar{x}$ est inversible si $x$ et $10$ sont premiers entre eux (cours) donc $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$.

Table

| $\cdot$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{7}$ | $\bar{9}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{7}$ | $\bar{9}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{9}$ | $\bar{1}$ | $\bar{7}$ |
| $\bar{7}$ | $\bar{7}$ | $\bar{1}$ | $\bar{9}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{9}$ | $\bar{9}$ | $\bar{7}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ |

on a $\bar{3}^2 = \bar{9}$, $\bar{3}^3 = \overline{27} = \bar{7}$

d'où $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{3}^2, \bar{3}^3\}$.

c'est un groupe cyclique d'ordre 4. Il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

$\boxed{7}$ On note $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des nombres de forme $a + b\sqrt{3}$ avec $a$ et $b$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.[2pts]

*Réponse :*

$\mathbb{Z}(\sqrt{3}) \neq \emptyset \quad (0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}])$

Soient $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $x = a + b\sqrt{3}$, $y = a' + b'\sqrt{3}$

$x - y = \underbrace{(a-a')}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b-b')}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

$x \cdot y = \underbrace{(aa' + bb'3)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(ab' + a'b)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

d'où sous-anneau

---

$\boxed{8}$ Donner un exemple de groupe $(G,*)$ contenant 9 éléments et tel que tout élément $x$ de $G$ vérifie $x^3 = e$ où $x^3 = x * x * x$ et $e$ désigne l'élément neutre de $G$. (Justifier toutes les affirmations.) [2pts]

*Réponse :*

Prenons $G = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$.

$x \in G \Leftrightarrow x = (a, b) \quad a, b \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

$x \mp x \mp x = (\bar{a} + \bar{a} + \bar{a}, \bar{b} + \bar{b} + \bar{b})$

$= (\bar{0}, \bar{0})$

car tous les éléments de $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ sont d'ordre 3.