NOM DE L'ÉTUDIANT:
Prénoms :
Numéro de Carte d'étudiant :

Algèbre fondamentale
Année scolaire 2005-2006
Epreuve tenant lieu de contrôle continu. Durée : 1 heure

Seules les justifications correctes rapporteront des points. Les étudiants répondront directement sur cette feuille en respectant l'espace réservé à la réponse. Le résumé polycopié et les notes de cours personnelles sont autorisés. Tout autre document est interdit.

$\boxed{1}$ Déterminer le sous-groupe de $\mathbf{U}_{16}$ engendré par $e^{4i\pi/16}$. [2pts]

Réponse :

$\boxed{2}$ Soit $(G,*_1)$, $(H,*_2)$ et $(W,*_3)$ trois groupes. On suppose que ϕ est un morphisme de $(G,*_1)$ dans $(H,*_2)$ et ψ est un morphisme de $(H,*_2)$ dans $(W,*_3)$. On pose $f = \psi \circ \phi$. Montrer que f est un morphisme de $(G,*_1)$ dans $(W,*_3)$. [2pts, toute égalité non justifiée = -0,5 pt]

Réponse :

$\boxed{3}$ Soit $(G,*)$ un groupe. pour $g \in G$, on définit $S(g)$ comme étant l'ensemble des éléments x de G qui vérifient $x^{-1} * g * x = g$. Montrer que $S(g)$ est un sous-groupe de G. Quand a-t-on $S(g) = G$? [3pts]

$\boxed{4}$ Soit σ la permutation de $\mathbf{S}_7$ définie par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer f^{50}. [2pts]

Réponse :

$\boxed{5}$ Préciser et justifier l'énoncé suivant[1] : en utilisant f définie sur $(\mathbb{R}^\star,\cdot)$ par $f(x) = x^2$ on voit que $\mathbb{R}^{\star+}$ est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{R}^\star/\{-1,+1\}$. [3pts]

Réponse :

$\boxed{6}$ Déterminer le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z},+,\cdot)$. Donner la table de ce groupe. A quel groupe est-il isomorphe ? [4pts]

Réponse :

1. L'énoncé distribué aux étudiants comportait une erreur, on lisait $\mathbb{Q}$ à la place de $\mathbb{R}$. Les étudiants qui ont remarqués l'erreur ont reçu un bonus

---

$\boxed{7}$ On note $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des nombres de forme $a + b\sqrt{3}$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.[2pts]

Réponse :

$\boxed{8}$ Donner un exemple de groupe $(G,*)$ contenant 9 éléments et tel que tout élément x de G vérifie $x^3 = e$ où $x^3 = x * x * x$ et e désigne l'élément neutre de G. (Justifier toutes les affirmations.) [2pts]

Réponse :