ALGEBRE[1]

Partiel du 31 mars 2005

durée : 2 heures

Nota bene. Les exercices et le problèmes sont indépendants. La plupart des questions peuvent être résolues en très peu de lignes. Le barème (approximatif) est 1: 1,5 pts, 2: 10,5 pts et Problème: 10,5 pts (pour un total de 22,5 pts). Les notes de cours ainsi que le résumé polycopié sont autorisés. L'usage de tout autre document est interdit.

$\boxed{1}$ Soit $(G,*)$ un groupe et ϕ un morphisme de $(G,*)$ dans lui-même. On note F_ϕ l'ensemble des éléments de G qui restent fixes par ϕ, c'est-à-dire

$$F_\phi = \{g \in G \,:\, \phi(g) = g\}.$$

Montrer que F_ϕ est un sous-groupe de G.

$\boxed{2}$ Soit $(G,*)$ un groupe *commutatif*. On note G_2 l'ensemble des éléments de G qui sont d'ordre inférieur où égal à 2, c'est-à-dire,

$$G_2 = \{g \in G \,:\, g * g = e\}$$

où e désigne l'élément neutre de G.

1. Montrer que G_2 est un sous-groupe de G,
2. Déterminer G_2 lorsque $(G\,,*) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\,,\overline{+})$.
3. Dans cette question (et uniquement dans cette question) on prend $(G,*) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,,\overline{+})$.
   (a) Former la table de $(G\,,*)$.
   (b) Montrer que $G_2 = G$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Trouver un groupe $(G\,,*)$ d'ordre 2^n tel que $G_2 = G$.
5. Montrer que si $|G|$ est un nombre impair alors $G_2 = \{e\}$.
6. Soit $(G',\circ)$ un autre groupe commutatif. Montrer que si $G \simeq G'$ alors $G_2 \simeq G'_2$.
7. Trouver un exemple de groupe G *non commutatif* pour lequel G_2 n'est pas un sous-groupe de G.

$\boxed{3}$ On rappelle que si

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On définit l'ensemble de matrices H comme suit

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \,:\, \alpha \in \mathbb{Q}^\star \text{ et } \beta \in \mathbb{Q} \right\}.$$

1. Licence de mathématiques (2-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III)*. Année scolaire 2004-2005

1. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}),\cdot)$.
2. On considère l'application $\phi : (\mathbb{Q}\,,+) \to (H\,,\cdot)$ définie pour $q \in \mathbb{Q}$ par

$$\phi(q) = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que ϕ est un morphisme injectif.
   (b) Montrer que $\phi(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe distingué de H.

3. Soit $M \in H$. On définit $\psi_M : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ par la relation

$$\psi_M(q) := \phi^{-1}(M^{-1} \cdot \phi(q) \cdot M).$$

   (a) Montrer que ψ_M est bien définie (est-il légitime d'utiliser ϕ^{-1} ?) puis montrer que ψ_M est un automorphisme de $(\mathbb{Q}\,,+)$.
   (b) Est-il vrai que quel que soit f automorphisme de $(\mathbb{Q}\,,+)$, il existe $M \in H$ telle que $f = \psi_M$?