ALGEBRE[1]

Solution du partiel du 20 avril 2004

durée : 2 heures

Le corrigé proposé est assez succinct. D'autres solutions sont souvent possibles. Le problème faisait essentiellement appel aux connaissances sur les notions de groupes, sous-groupes, générateurs et morphismes de groupes.

Le problème fera intervenir les groupes:

a) $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}),.)$ formé de l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels que l'on munit de la multiplication habituelle des matrices,
b) $(\mathbb{C}^*,.)$ formé des nombres complexes *non nuls* que l'on munit de la multiplication habituelle des nombres complexes,
c) $(\mathbb{R}^{\star +},.)$ formé de l'ensemble des nombres réels *strictement positifs* que l'on munit de la multiplication habituelle des nombres réels. On a d'ailleurs $\mathbb{R}^{\star +} < (\mathbb{C}^*,.)$.

On rappelle que

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ alors } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

I. Soit G l'ensemble des matrices **inversibles** M de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où α et β sont des nombres **réels**. (On a donc $G \subset \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.)

A) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}),.)$.

Solution. *G étant non vide (et inclus dans $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$), il suffit de démontrer que si $M,N \in G$ alors $M.N^{-1} \in G$. Puisque $M.N^{-1}$ est évidemment inversible, il suffit de montrer qu'elle est de la forme voulue. Posons*

$$M \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow N^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Il suit

$$M.N^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \alpha.a + \beta.b & -\alpha.b + \beta.a \\ -a.\beta + \alpha.b & b.\beta + \alpha.a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \triangle \\ -\triangle & \square \end{pmatrix}$$

avec $\square = \frac{\alpha a + \beta b}{a^2 + b^2}$ et $\triangle = \frac{-\alpha b + \beta a}{a^2 + b^2}$ donc $M.N^{-1} \in G$ et G est bien un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.

B) Montrer que l'application ψ définie par

$$\psi(M) = \alpha + i\beta \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

est un **isomorphisme** de $(G,.)$ sur $(\mathbb{C}^*,.)$. (On vérifiera d'abord qu'elle prend bien ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$.)

Solution. *Remarquons d'abord que ψ prend bien ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Puisque M est inversible on a $\det M \neq 0$. Or $\det M = \alpha^2 + \beta^2 = |\psi(M)|$ et le module du complexe $\psi(M)$ étant non nul, $\psi(M)$ lui-même est non nul.*

On montre maintenant successivement que i) ψ est un morphisme, ii) est injective et iii) est surjective.

1. Licence de mathématiques (2-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III)*. Année scolaire 2003-2004

i) Si M et N sont comme ci-dessus on a

$$M.N = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta & b\alpha + a\beta \\ -(b\alpha + a\beta) & a\alpha - b\beta \end{pmatrix}$$

d'où

$$\psi(M.N) = (a\alpha - b\beta) + i(b\alpha + a\beta) = (\alpha + i\beta).(a + ib) = \psi(M).\psi(N)$$

donc ψ est un morphisme.
ii) $M \in \ker\psi \iff \psi(M) = 1 \iff \alpha + i\beta = 1 \iff (\alpha,\beta) = (1,0) \iff M = Id$ donc ψ est injective.
iii) Soit $z = u + iv \in \mathbb{C}^*$ quelconque. On montre que z a un antécédent par ψ. Posons

$$M =_{def} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \in G.$$

On a évidemment $\psi(M) = z$ et M est l'antécédent cherché. Ceci montre que ψ est surjective.

C) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $M_n \in G$ par

$$M_n = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & \sin(\frac{2\pi}{n}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}.$$

Quel est l'ordre de M_n ? Donner la liste (en justifiant votre réponse) des éléments du groupe $\langle M_n \rangle$. (On pourra utiliser la question précédente et calculer notamment $\psi(M_n^k)$. On rappelle que

$$M_n^k =_{def} \underbrace{M_n.M_n \ldots .M_n}_{k\,fois}.)$$

Solution. *Pour $k \in \mathbb{N}$, on a, puisque ψ est un morphisme,*

$$\psi(M_n^k) = (\psi(M_n))^k = \left(\cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})\right)^k = \left(\exp(\frac{2i\pi}{n})\right)^k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right).$$

Donc

$$\psi(M_n^k) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{n}) & \sin(\frac{2k\pi}{n}) \\ -\sin(\frac{2k\pi}{n}) & \cos(\frac{2k\pi}{n}) \end{pmatrix}\right).$$

D'où l'on déduit, puisque ψ est un isomorphisme,

$$M_n^k = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{n}) & \sin(\frac{2k\pi}{n}) \\ -\sin(\frac{2k\pi}{n}) & \cos(\frac{2k\pi}{n}) \end{pmatrix}.$$

Il suit que $M_n^n = Id$ et $M_n^k \neq Id$ pour $1 \leq k < n$ de sorte que $o(M_n) = n$. Le groupe cyclique $\langle M_n \rangle$ est donc formé des n premières puissances de M_n i.e.

$$\langle M_n \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{n}) & \sin(\frac{2k\pi}{n}) \\ -\sin(\frac{2k\pi}{n}) & \cos(\frac{2k\pi}{n}) \end{pmatrix} : k = 0,\ldots,n-1 \right\}.$$

II. On considère $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et H, le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ engendré par S et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, $H = \langle S, M_4 \rangle$.

A) Quel est l'ordre de S ? Montrer que $M_4^3 = M_4^{-1}$.

Solution. *On a $S \neq Id$ et on vérifie immédiatement que $S^2 = Id$ donc $o(S) = 2$. En particulier on a $S^{-1} = S$. D'après la dernière question du I, on a $M_4^4 = Id$ d'où $M_4^3 = M_4^{-1}$.*

B) Montrer que $M_4.S = S.M_4^{-1}$. Que dire de $M_4^{-1}.S$?

Solution. *C'est un simple calcul. On a aussi $M_4^{-1}S = SM_4$.*

C) Donner la liste (en justifiant votre réponse) de tous les éléments de H. (Indication. On devra montrer que H contient **huit et seulement huit** éléments.)

Solution. *D'après le cours, tout élément* $h \in H$ *s'écrit*

(1) $$h = (S\, ou\, M_4)^{\pm 1} . (S\, ou\, M_4)^{\pm 1} \dots (S\, ou\, M_4)^{\pm 1}.$$

Grâce à la propriété $M_4 S = S M_4^{-1}$ *(et aussi* $M_4^{-1} S = S M_4$*) dans (1) on peut — quitte à remplacer des* M_4 *par des* M_4^{-1} *et réciproquement — faire glisser tous les* $S = S^{-1}$ *à gauche de la formule. Par exemple si* $h = M_4 . M_4 . S M_4^{-1} S$ *on a* $h = S M_4^{-1} M_4^{-1} M_4^{-1}$*. De cette manière on obtient que* h *s'écrit* $h = S^{k_1} M_4^{k_2}$ *avec* $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$*. Mais puisque* $o(S) = 2$*,* S^{k_1} *ne prend en réalité que les valeurs* $S^0 = Id$ *et* $S^1 = S$ *tandis que puisque* $o(M_4) = 4$*,* $M_4^{k_2}$ *ne prend en réalité que les valeurs* $M_4^0 = Id, M_4^1 = M_4, M_4^2, M_4^3$*. On arrive donc à la conclusion que*

(2) $$H = \{S^l M_4^n,\ l \in \{0,1\},\ n \in \{0,1,2,3\}\}.$$

Les huit éléments indiqués sont bien 2 à 2 distincts. En fait

$$H = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, -Id, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

D) Donner une interprétation géométrique de H. (Autrement dit, trouver un groupe, issu de la géométrie, qui soit isomorphe à H.)

Solution. *Le groupe* H *est isomorphe au groupe diédral* $\mathbf{D}_4$ *constitué des isométrie du plan qui conservent le carré (ABCD) de centre* 0 *(cfr TD). En effet, on a* $\mathbf{D}_4 = \{s^l r^n\ l \in \{0,1\},\ n \in \{0,1,2,3\}\}$ *avec* $sr = rs^{-1}$ *où* s *est la symétrie orthogonale d'axe* (OA) *et* r *est la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$*. On peut vérifier que l'application* $f : \mathbf{D}_4 \to H$ *définie par* $f(s^l r^n) = S^l M_4^n$ *est un isomorphisme.*

Nota Bene. Cette question était hors barême. On attendait seulement des candidats qu'ils réalisent la similarité entre le groupe H et le groupe $\mathbf{D}_4$ étudié en TD.

III. On rappelle que pour un groupe $(W,.)$ quelconque, $Aut(W)$ désigne l'ensemble des automorphismes du groupe $(W,.)$, c'est-à-dire les morphismes bijectifs de $(W,.)$ dans lui-même. Cet ensemble $Aut(W)$ devient un groupe lorsqu'on le munit de la loi de composition des applications. *Cette propriété est admise, on ne demande pas de la démontrer.*

A) Les trois applications suivantes sont-elles des **automorphismes** de $(\mathbb{C}^*,.)$?

$$\phi_1 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*,.) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,.) \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}, \quad \phi_2 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*,.) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,.) \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}, \quad \phi_3 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*,.) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,.) \\ z & \longmapsto & \frac{z}{|z|^2} \end{array}$$

Solution. *i) Que* ϕ_1 *soit un automorphisme est très simple.*
ii) ϕ_2 *n'est pas injective* ($\phi_2(1) = \phi_2(-1)$ *donc elle n'est pas un automorphisme.*
iii) Montrons que ϕ_3 *est un automorphisme. Soient* $z, z' \in \mathbb{C}^*$*, on a*

$$\begin{array}{rcll} \phi_3(z.z') & = & \frac{zz'}{|zz'|^2} & \textit{(définition)} \\ & = & \frac{z}{|z|^2} \cdot \frac{z'}{|z'|^2} & \textit{car } |zz'| = |z'| . |z'|. \\ & = & \phi_3(z).\phi_3(z') & \end{array}$$

Ceci montre que ϕ_3 *est un morphisme. Montrons qu'il est injectif:*

$$x \in \ker \phi_3 \Rightarrow \frac{z}{|z|^2} = 1 \Rightarrow \left| \frac{z}{|z|^2} \right| = 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Revenant à $\phi_3(z) = 1$ *on obtient alors* $z = 1$ *et ceci montre que* ϕ_3 *est injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Soit* $u \in \mathbb{C}^*$*. On a* $u = re^{i\theta}$ *où* r *est le module de* u *et* θ *son argument. Posons* $z = \frac{1}{r} e^{i\theta}$*. On a* $\phi_3(z) = \frac{z}{|z|^2} = re^{i\theta} = u$*. On a donc trouvé un antécédent pour* u *et ceci montre que* ϕ_3 *est surjective. Donc* ϕ_3 *est bien un automorphisme de* $\mathbb{C}^*$*.*

B) On considère à présent le groupe $(\mathbb{R}^{*+},.)$. Montrer que si $f \in Aut(\mathbb{R}^{*+})$ alors $\phi_f \in Aut(\mathbb{C}^\star)$ où ϕ_f est définie par

$$\phi_f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*,.) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,.) \\ z & \longmapsto & f(|z|) \cdot \frac{z}{|z|} \end{array}$$

Solution. *Soient $z,z' \in \mathbb{C}^*$, on a*

$$\begin{array}{rcll} \phi_f(z.z') = & & f(|zz'|)\frac{zz'}{|zz'|} & \textit{(définition)} \\ & = & f(|z|\,|z'|)\frac{z}{|z|}\cdot\frac{z'}{|z'|} & \textit{car } |zz'| = |z'|\,.\,|z'| \\ & = & f(|z|).f(|z'|)\frac{z}{|z|}\cdot\frac{z'}{|z'|} & \textit{car } f \in Aut(\mathbb{R}^{*+}) \\ & = & \phi_f(z).\phi_f(z') & \end{array}$$

L'application ϕ_f est donc un morphisme. En raisonnant comme dans la question précédente, on montre que $z \in \ker \phi_f \Rightarrow |\phi_f(z)| = 1 \Rightarrow f(|z|) = 1$ et puisque $f \in Aut(\mathbb{R}^{*+})$ cela implique $|z| = 1$. Puis reportant $f(|z|) = 1$ et $|z| = 1$ dans $\phi_f(z) = 1$, on obtient $z = 1$ et cela montre que ϕ_f est injective. Soit $u \in \mathbb{C}^*$. On a $u = re^{i\theta}$ où r est le module de u et θ son argument. Posons $z = f^{-1}(r)e^{i\theta}$. On a $\phi_f(z) = re^{i\theta} = u$. On a donc trouvé un antécédent pour u et ceci montre que ϕ_f est surjective. En conclusion ϕ_f est bien un automorphisme de $\mathbb{C}^*$.

C) Montrer que $Aut(\mathbb{C}^*)$ contient une infinité d'éléments.

Solution. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application g_n définie par $g_n(z) = |z|^n \cdot \frac{z}{|z|}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^*$. Ces automorphismes sont deux à deux distincts de sorte que $Aut(\mathbb{C}^*)$ contient une infinité d'éléments.*

D) Montrer que les groupes $Aut(\mathbb{C}^*)$ et $Aut(G)$ sont isomorphes. (On pourra construire un isomorphisme Ψ entre $Aut(\mathbb{C}^*)$ et $Aut(G)$ en utilisant l'isomorphisme ψ de I. B).)

Solution. *L'isomorphisme Ψ est donné par la formule suivante :*

$$\Psi : \begin{array}{ccc} (Aut(\mathbb{C}^*),\circ) & \longrightarrow & (Aut(G),\circ) \\ g & \longmapsto & \psi^{-1} \circ g \circ \psi \end{array}.$$

Montrons simplement que Ψ est injectif. L'élément neutre de $Aut(G)$ est l'application identité, notée I. On a $g \in \ker \Psi \Rightarrow \Psi(g) = I \Rightarrow \psi^{-1} \circ g \circ \psi = I$. En composant à droite par ψ^{-1} et à gauche par ψ on trouve $g = \psi \circ \psi^{-1}$ = application identité de $\mathbb{C}^*$ = neutre de $(Aut(\mathbb{C}^*),\circ)$. Donc Ψ est injective.

FIN