

ALGEBRE¹

Partiel du 20 avril 2004

durée : 2 heures

Nota bene. Les trois parties du problème sont largement indépendantes. Cependant, dans certains cas, les résultats obtenus dans les questions précédentes peuvent faciliter les réponses. Le barème (approximatif) est I : 6 pts, II : 7 pts et III : 9 pts (pour un total de 22 pts). Les notes de cours sont autorisées. L'usage de tout autre document est interdit. Une réponse exacte sans justification ou avec une justification fautive ne rapportera aucun point. Il sera fortement tenu compte de la clarté de la rédaction.

Le problème fera intervenir les groupes:

- a) $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ formé de l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels que l'on munit de la multiplication habituelle des matrices,
- b) (\mathbb{C}^*, \cdot) formé des nombres complexes *non nuls* que l'on munit de la multiplication habituelle des nombres complexes,
- c) (\mathbb{R}^{*+}, \cdot) formé de l'ensemble des nombres réels *strictement positifs* que l'on munit de la multiplication habituelle des nombres réels. On a d'ailleurs $\mathbb{R}^{*+} < (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

On rappelle que

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ alors } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

I. Soit G l'ensemble des matrices **inversibles** M de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où α et β sont des nombres **réels**. (On a donc $G \subset \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.)

A) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

B) Montrer que l'application ψ définie par

$$\psi(M) = \alpha + i\beta \quad \text{si } M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

est un **isomorphisme** de (G, \cdot) sur (\mathbb{C}^*, \cdot) . (On vérifiera d'abord qu'elle prend bien ses valeurs dans \mathbb{C}^* .)

C) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $M_n \in G$ par

$$M_n = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

Quel est l'ordre de M_n ? Donner la liste (en justifiant votre réponse) des éléments du groupe $\langle M_n \rangle$. (On pourra utiliser la question précédente et calculer notamment $\psi(M_n^k)$. On rappelle que

$$M_n^k =_{\text{def}} \underbrace{M_n \cdot M_n \cdot \dots \cdot M_n}_{k \text{ fois}}$$

1. Licence de mathématiques (2-ième année), Université Paul Sabatier (Toulouse III). Année scolaire 2003-2004

II. On considère $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et H , le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ engendré par S et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, $H = \langle S, M_4 \rangle$.

- A) Quel est l'ordre de S ? Montrer que $M_4^3 = M_4^{-1}$.
 B) Montrer que $M_4.S = S.M_4^{-1}$. Que dire de $M_4^{-1}.S$?
 C) Donner la liste (en justifiant votre réponse) de tous les éléments de H . (Indication. On devra montrer que H contient **huit et seulement huit** éléments.)
 D) Donner une interprétation géométrique de H . (Autrement dit, trouver un groupe, issu de la géométrie, qui soit isomorphe à H .)

III. On rappelle que pour un groupe (W, \cdot) quelconque, $Aut(W)$ désigne l'ensemble des automorphismes du groupe (W, \cdot) , c'est-à-dire les morphismes bijectifs de (W, \cdot) dans lui-même. Cet ensemble $Aut(W)$ devient un groupe lorsqu'on le munit de la loi de composition des applications. L'élément neutre de ce groupe $(Aut(W), \circ)$ est l'application identité. *Ces propriétés sont admises, on ne demande pas de les démontrer.*

- A) Les trois applications suivantes sont-elles des **automorphismes** de (\mathbb{C}^*, \cdot) ?

$$\phi_1 : \begin{matrix} (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{matrix}, \quad \phi_2 : \begin{matrix} (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & z^2 \end{matrix}, \quad \phi_3 : \begin{matrix} (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & \frac{z}{|z|^2} \end{matrix}$$

- B) On considère à présent le groupe (\mathbb{R}^{*+}, \cdot) . Montrer que si $f \in Aut(\mathbb{R}^{*+})$ alors $\phi_f \in Aut(\mathbb{C}^*)$ où ϕ_f est définie par

$$\phi_f : \begin{matrix} (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & f(|z|) \cdot \frac{z}{|z|} \end{matrix}$$

- C) Montrer que $Aut(\mathbb{C}^*)$ contient une infinité d'éléments.
 D) Montrer que les groupes $Aut(\mathbb{C}^*)$ et $Aut(G)$ sont isomorphes. (On pourra construire un isomorphisme Ψ entre $Aut(\mathbb{C}^*)$ et $Aut(G)$ en utilisant l'isomorphisme ψ de I. B.)

FIN