# Algèbre
# L2 Mathématiques

## Contrôle terminal
## 28 MARS 2008

NUMÉRO D'ANONYMAT :

**Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites. Il est conseillé de commencer par lire le sujet dans son intégralité.**

NOTE :

Université Paul Sabatier

## 1. (2 pts)

Soient $G$ et $G'$ deux groupes. Démontrer le théorème suivant :

**Théorème.** *Si $\varphi : G \to G'$ est un isomorphisme alors l'application réciproque $\varphi^{-1} : G' \to G$ (qui existe puisque $\varphi$ est bijective) est elle-même un isomorphisme.*

*Réponse* :

Notons par $\circ$ la loi de $G'$ et $*$ la loi de $G$. Soient $x,y \in G'$. Nous devons montrer que $\varphi^{-1}(x \circ y) = \varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(y)$. Puisque $\varphi$ est bijective, il existe $a$ et $b$ dans $G$ tels que $\varphi(a) = x$ et $\varphi(b) = y$. De plus,

$$x \circ y = \varphi(a) \circ \varphi(b) = \varphi(a * b)$$

car $\varphi$ est un morphisme. Il suit que

$$\varphi^{-1}(x \circ y) = \varphi^{-1}(\varphi(a * b)) = a * b = \varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(y).$$

**Barème : 2 pts**

## 2. (4 pts)

Soient $(G,*)$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$. Démontrer que lorsque $H$ est un sous-groupe *distingué* de $G$, la loi $*$ est *compatible* avec la relation $\mathsf{R}_H$ et, dans ces conditions, donner la définition la loi sur $G/H$ en montrant la consistance de cette définition. On rappelle que la relation $\mathsf{R}_H$ sur $G$ est définie par $x\,\mathsf{R}_H\,y$ si et seulement si $x^1 * y \in H$ $(x, y \in G)$.

*Réponse* :

Pour montrer que la loi $*$ est *compatible* avec la relation $R_H$ sachant que $H$ est distingué (dans $G$) nous devons vérifier que, pour $g_1, g_2, r_1, r_2 \in G$, nous avons

$$\left.\begin{matrix} g_1\,\mathsf{R}_H\,g_2 \\ r_1\,\mathsf{R}_H\,r_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (g_1 * r_1)\ \mathsf{R}_H\ (g_2 * r_2).$$

Or $g_1 \mathsf{R}_H g_2 \Rightarrow g_1^{-1} * g_2 \in H \Rightarrow g_1^{-1} = h * g_2^{-1}$ pour un certain $h \in H$. De même $r_1\,\mathsf{R}_H\,r_2 \Rightarrow r_1^{-1} = h' * r_2^{-1}$ pour un certain $h' \in H$. Ensuite,

$$\begin{aligned}(g_1 * r_1)^{-1} * (g_2 * r_2) =& r_1^{-1} * g_1^{-1} * g_2 * r_2 \\ =& (h' * r_2^{-1}) * (h * g_2^{-1}) * g_2 * r_2 \\ =& h' * r_2^{-1} * h * r_2 \\ =& h' * (\text{un élément de } H) \qquad\qquad \text{car } H \text{ est distingué}\end{aligned}$$

Etant le produit de deux éléments du sous-groupe $H$, $(g_1 * r_1)^{-1} * (g_2 * r_2)$ appartient aussi à $H$ et cela montre que $g_1 * r_1 \mathsf{R}_H g_2 * r_2$.
Nous pouvons définir une loi $\bar{*}$ sur $G/H$ comme suit

$$(2.0.1) \qquad \bar{*} : \begin{array}{ccc} G/H \times G/H & \longrightarrow & G/H \\ (\mathtt{C}_1\,,\mathtt{C}_2) & \longmapsto & \mathbf{cl}\left(\begin{array}{l}\text{n'importe quel} \\ \text{représentant de } \mathtt{C}_1\end{array} * \begin{array}{l}\text{n'importe quel} \\ \text{représentant de } \mathtt{C}_2\end{array}\right)\end{array}$$

Pour que cette définition soit consistante nous devons montrer que le choix des représentants n'influe en rien sur la valeur trouvée. Autrement dit, nous devons vérifier que

$$\left.\begin{matrix} x_1, x_1' & \in & \mathtt{C}_1 \\ x_2, x_2' & \in & \mathtt{C}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{cl}(x_1 * x_2) = \mathbf{cl}(x_1' * x_2').$$

Il en est bien ainsi. En effet, en utilisant la compatibilité pour la deuxième implication,

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix} x_1, x_1' \in \mathtt{C}_1 \\ x_2, x_2' \in \mathtt{C}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 \mathsf{R}_H x_1' \\ x_2 \mathsf{R}_H x_2' \end{matrix}\right. \quad &\Rightarrow \quad (x_1 * x_2)\mathsf{R}_H(x_1' * x_2') \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{cl}(x_1 * x_2) = \mathbf{cl}(x_1' * x_2').\end{aligned}$$

La loi $\bar{ast}$ est par conséquent bien définie et c'est une loi interne sur $G/H$.

**Barème : 4 pts**

## 3. Exercice (6,5 pts)

On considère un groupe $(G,*)$ dont l'élément neutre est noté $e$. Etant données deux éléments $a$ et $b$ dans $G$, on définit un troisième élément de $G$, noté $[a,b]$, et appelé le *commutateur* de $a$ et $b$, par la relation

$$[a,b] = a^{-1} * b^{-1} * a * b.$$

Pour tout $g \in G$, on note aussi

$$x^{[g]} = g^{-1} * x * g.$$

3.1. **(1,5 pts).** (a) A quelle condition sur $G$ a-t-on $[a,b] = e$ quels que soient $a$ et $b$ dans $G$ ? (b) Montrer que si $\phi$ est un morphisme de $(G,*)$ dans lui-même alors $\phi([a,b]) = [\phi(a),\phi(b)]$.

*Réponse* :

Soient $a,b \in G$, on a
$[a,b] = e \iff a^{-1} * b^{-1} * a * b = e \iff b^{-1} * a * b = a \iff a * b = b * a$. Donc
$[a,b] = e$ pour tous $a,b \in G$ si et seulement si pour tous $a,b \in G$
$a * b = b * a$ c'est-à-dire si et seulement si $G$ est commutatif.
Si $a,b \in G$ et $\phi$ est un endomorphisme de $g$ alors

$$\begin{aligned}(3.1.1)\quad \phi([a,b]) &= \phi(a^{-1} * b^{-1} * a * b) = \phi(a^{-1}) * \phi(b^{-1}) * \phi(a) * \phi(b)\\ &= (\phi(a))^{-1} * (\phi(b))^{-1} * \phi(a) * \phi(b) = [\phi(a),\phi(b)].\end{aligned}$$

La première égalité utilise la définition d'un commutateur, la seconde utilise la définition de morphisme et la troisième le théorème sur l'image d'un symétrique par un morphisme.

**Barème : 0,5 pour (a) et 1 pour (b)**

3.2. **(2,5 pts).** Soient $a,b$ et $c$ des éléments quelconques de $G$. Démontrer les identités suivantes,

(1) $[a,b]^{-1} = [b,a]$;
(2) $[a*b,c] = [a,c]^{[b]} * [b,c]$;
(3) $[a^{-1},b] = [b,a]^{[a^{-1}]}$.

*Réponse* :

Il s'agit d'un simple exercice de calcul dans les groupes.

(1) La première formule repose sur le fait que le symétrique d'un produit est le produit des symétriques mais dans l'ordre inversé et sur le fait que le symétrique du symétrique de $g$ est $g$ lui-même.

$$\begin{aligned}[a,b]^{-1} &= (a^{-1} * b^{-1} * a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} * (b^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{-1}\\ &= b^{-1} * a^{-1} * b * a = [b,a].\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}[a*b,c] &= (a*b)^{-1}*c^{-1}*(a*b)*c\\ &= b^{-1}*a^{-1}*c^{-1}*a*b*c\\ &= b^{-1}*(a^{-1}*c^{-1}*a*c)*b*(b^{-1}*c^{-1}*b*c)\\ &= [a,c]^{[b]}\ *\ [b,c].\end{aligned}$$

À la troisième égalité, on a inséré le terme $c*b*b^{-1}*c^{-1}$ qui n'est autre que l'élément neutre.

(3)

$$\begin{aligned}[a^{-1},b] &= a*b^{-1}*a^{-1}*b\\ &= (a^-1)^{-1}*(b^{-1}*a^{-1}*b*a)*a^{-1} = [b,a]^{[a^{-1}]}.\end{aligned}$$

**Barème : 0,5 pour la première formule, 1 pour chacune des deux autres.**

3.3. **(2,5 pts).** On suppose que $G$ est le groupe de permutations $\mathrm{S}_n$ avec $n > 5$. (a) Calculer $[(123),((124)]$. On détaillera les calculs et on donnera le résultat sous la forme d'un produit de cycles à support disjoints. (b) Quel est l'ordre de $[(123),((124)]$ ?

*Réponse* :

(a) On vérifie d'abord que $(123)^{-1} = (132)$ et $(124)^{-1} = (142)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}[(123),((124)] &= (123)^{-1}*(124)^{-1}*(123)*(124)\\ &= (132)(142)(123)(124) = (12)(34).\end{aligned}$$

(b) On a $(12)(34) \neq Id$ et $((12)(34))^2 = (12)^2(34)^2 = IdId = Id$. Ici on a utilisé que deux cycles à support disjoints commutent et aussi qu'un cycle de longueur $k$ est exactement d'ordre $k$.

**Barème : 1,5 pour le calcul correct du commutateur (1 pt seulement, si la permutation est correctement calculée mais pas présentée sous la forme d'un produit de cycles à supports disjoints ), 0,5 pour le calcul de l'ordre.**

---

## 4. Exercice 8 pts

On considère le groupe d'ordre 18 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ muni de la loi $\bar{+}$ définie par l'addition coordonnée par coordonnée : $(\bar{a},\bar{b})\bar{+}(\bar{a'},\bar{b'}) = (\overline{a+a'},\overline{b+b'})$. Par exemple $((\bar{2},\bar{5})\bar{+}(\bar{1},\bar{3}) = (\bar{0},\bar{2})$. Ce groupe sera noté $(W,\bar{+})$.

4.1. **(1,5 pts).**

(1) Montrer que quel que soit $(\bar{a},\bar{b}) \in W$, on a $6\,(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{0},\bar{0})$. On rappelle que

$$6\,(\bar{a},\bar{b}) = \underbrace{(\bar{a},\bar{b}) + \cdots + (\bar{a},\bar{b})}_{\text{six fois}}.$$

(2) Quels sont les ordres possibles pour les éléments de $W$ ?

*Réponse* :

(1) On a $6\,(\bar{a},\bar{b}) = (\overline{6a},\overline{6b})$. Comme 3 divise $6a$ et 6 divise $6b$ on a $\overline{6a} = \bar{0}$ et $\overline{6b} = \bar{0}$ d'où la conclusion.

(2) D'après le théorème de Lagrange, l'ordre de tout élément de $W$ est un diviseur de l'ordre du groupe c'est-à-dire ici de 18, soit $1, 2, 3, 6, 9$ et 18. Mais la question précédente montre que l'ordre d'un élément de $W$ est au maximum 6, il reste donc seulement les possibilités $1, 2, 3,$ et 6.

**Barème : 0,5 pour la première question. 1 pt pour la seconde question. Les étudiants qui se limitent à faire appel au théorème de Lagrange et qui n'écarte pas les possibilités 9 et 18 reçoivent seulement 0,5 pt.**

4.2. **(3 pts).** Soit $F$ l'ensemble des éléments $(\bar{a},\bar{b}) \in W$ tels que $3\,(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{0},\bar{0})$.
(a) Montrer que $H$ est un sous-groupe de $W$ et donner la liste de tous ses éléments.
(b) Déterminer un ensemble $A$ le plus petit possible tels que $F = \langle A \rangle$.

*Réponse* :

(a) $F$ est non vide puisque il contient évidemment $(\bar{0},\bar{0})$. D'autre part, si $(\bar{a},\bar{b}) \in W$ et $(\bar{a'},\bar{b'}) \in W$ alors

$$3\,[(\bar{a},\bar{b}) - (\bar{a},\bar{b})] = 3(\bar{a},\bar{b}) - 3(\bar{a'},\bar{b'}) = (\bar{0},\bar{0}) - (\bar{0},\bar{0}) = (\bar{0},\bar{0}),$$

ce qui montre que $F$ est bien un sous-groupe de $W$. En passant en revue tous les éléments de $W$, on trouve

$$F = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{4}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{1},\bar{4}), (\bar{2},\bar{2}), (\bar{2},\bar{4})\}.$$

(b) Chacun des éléments de $F$ peut s'écrire $n(\bar{1},\bar{0}) + m(\bar{0},\bar{2})$ avec $n \in \{0,1,2\}$ et $m \in \{0,1,2\}$ de sorte que $H = \langle (\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2}) \rangle$. L'ensemble de générateurs proposé est minimal. En effet, sinon, il existerait un ensemble de générateurs contenant un seul élément ce qui signifierait que le groupe $F$ est cyclique donc engendré par un éléments d'ordre 9 (puisqu'il contient 9 éléments) ce qui est impossible car $W$ ne contient aucun élément d'ordre 9.

**Barème (3+1) : 1 pt pour groupe, 1 pour la liste des éléments, 1 pour un ensemble de générateurs contenant deux éléments, 1 point de bonus pour qui démontre qu'un tel système est minimal. Il est possible que certains étudiants commencent par donner la liste de tous les éléments de $F$ et démontrent à l'aide d'une table que ceux-ci forment un sous-groupe de $W$, une telle démarche, si elle aboutit, rapporte 2 pts (le 1 pt pour groupe et le 1 pt pour liste).**

4.3. **(2 pts).** Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 9 de $W$. (Indication si $G$ est sous-groupe d'ordre 9 de $W$ quels sont les ordres possibles pour les éléments de $G$?)

*Réponse* :

Soit $G$ un tel groupe. D'après le théorème de Lagrange, les ordres possibles pour les éléments de $G$ sont 1,3 et 9. Or nous savons depuis la première question que $G$ ne contient pas d'éléments d'ordre 9, donc tout élément de $G$ est soit $(\bar{0},\bar{0}$ soit un élément d'ordre 3. il en résulte que $G$ est inclus dans $F$ est comme $G$ et $F$ auront le même nombre d'éléments ils sont nécessairement égaux. Il existe donc unet un seul groupe d'ordre $9$ et c'est le groupe $F$.

**Barème : 2 pts. (1 pt s'il y a un bon raisonnement sur les ordres).**

4.4. **(1 pts).** $W$ est-il isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$?

*Réponse* :

le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ contient un élément d'ordre $9$, à savoir $(\bar{0}, \bar{1})$ donc si il était isomorphe à $W$ celui-ci contiendrait aussi un élément d'ordre $9$ (cfr partiel) or nous savons que $W$ ne contient aucun élément d'ordre $9$. Les deux groupes ne sont donc pas isomorphes.

**Barème : 1 pt**