Algèbre
L2 Mathématiques

Contrôle terminal
28 MARS 2008

NUMÉRO D'ANONYMAT :

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites. Il est conseillé de commencer par lire le sujet dans son intégralité.

NOTE :

Université Paul Sabatier

1. (2 pts)

Soient G et G' deux groupes. Démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Si* $\varphi : G \to G'$ *est un isomorphisme alors l'application réciproque* $\varphi^{-1} : G' \to G$ *(qui existe puisque* φ *est bijective) est elle-même un isomorphisme.*

Réponse :

2. (4pts)

Soient $(G,*)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Démontrer que lorsque H est un sous-groupe *distingué* de G, la loi $*$ est *compatible* avec la relation R_H et, dans ces conditions, donner la définition la loi sur G/H en montrant la consistance de cette définition. On rappelle que la relation R_H sur G est définie par $x\,R_H\,y$ si et seulement si $x^1 * y \in H$ $(x, y \in G)$.

Réponse :

3. Exercice (6,5 pts)

On considère un groupe $(G,*)$ dont l'élément neutre est noté e. Etant données deux éléments a et b dans G, on définit un troisième élément de G, noté $[a,b]$, et appelé le *commutateur* de a et b, par la relation

$$[a,b] = a^{-1} * b^{-1} * a * b.$$

Pour tout $g \in G$, on note aussi

$$x^{[g]} = g^{-1} * x * g.$$

3.1. **(1,5 pts).** (a) A quelle condition sur G a-t-on $[a,b] = e$ quels que soient a et b dans G ? (b) Montrer que si ϕ est un morphisme de $(G,*)$ dans lui-même alors $\phi([a,b]) = [\phi(a),\phi(b)]$.

Réponse :

3.2. **(2,5 pts).** Soient a,b et c des éléments quelconques de G. Démontrer les identités suivantes,

(1) $[a,b]^{-1} = [b,a]$;
(2) $[a * b, c] = [a,c]^{[b]} * [b,c]$;
(3) $[a^{-1}, b] = [b,a]^{[a^{-1}]}$.

Réponse :

3.3. **(2,5 pts).** On suppose que G est le groupe de permutations S_n avec $n > 5$. (a) Calculer $[(123),((124)]$. On détaillera les calculs et on donnera le résultat sous la forme d'un produit de cycles à support disjoints. (b) Quel est l'ordre de $[(123),((124)]$?

Réponse :

4. Exercice (7,5pts)

On considère le groupe d'ordre 18 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ muni de la loi $\bar{+}$ définie par l'addition coordonnée par coordonnée : $(\bar{a},\bar{b})\bar{+}(\bar{a'},\bar{b'}) = (\overline{a+a'},\overline{b+b'})$. Par exemple $((\bar{2},\bar{5})\bar{+}(\bar{1},\bar{3}) = (\bar{0},\bar{2})$. Ce groupe sera noté $(W,\bar{+})$.

4.1. **(1,5 pts).**

(1) Montrer que quel que soit $(\bar{a},\bar{b}) \in W$, on a $6\,(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{0},\bar{0})$. On rappelle que
$$6\,(\bar{a},\bar{b}) = \underbrace{(\bar{a},\bar{b})\bar{+}\ldots\bar{+}(\bar{a},\bar{b})}_{\text{six fois}}.$$

(2) Quels sont les ordres possibles pour les éléments de W ?

Réponse :

4.2. **(3 pts).** Soit F l'ensemble des éléments $(\bar{a}, \bar{b}) \in W$ tels que $3\,(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$.
(a) Montrer que H est un sous-groupe de W et donner la liste de tous ses éléments.
(b) Déterminer un ensemble A le plus petit possible tels que $F = \langle A \rangle$.

Réponse :

4.3. **(2 pts).** Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 9 de W. (Indication si G est sous-groupe d'ordre 9 de W quels sont les ordres possibles pour les éléments de G?)

Réponse :

4.4. **(1 pts).** W est-il isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$?

Réponse :