Algèbre
L2 Mathématiques

Controle continu
29 février 2008

NOM :

PRENOM :

Numéro de la carte d'étudiant :

Numéro du groupe de TD :

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

NOTE :

Université Paul Sabatier

1. (4 PTS)

Démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Pour qu'un morphisme soit injectif il faut et il suffit que son noyau se réduise à l'élément neutre.*

Réponse :

Soit $\phi : (G,*) \to (G',\circ)$ un morphisme de groupe.

($\Longrightarrow$) *Nous supposons que φ est injective et montrons que $\ker\varphi = \{e_G\}$.*

Nous savons que $e_G \in \ker\varphi$. Si x est un autre élément de $\ker\varphi$ avec $x \neq e_G$ alors $\varphi(e_G) = e_{G'} = \varphi(x)$ donc x et e_G ont la même image sans être égaux, ce qui contredit l'injectivité de φ.

($\Longleftarrow$) *Nous supposons que $\ker\varphi = \{e_G\}$ et montrons que φ est injective.*

Supposons que x et y soient deux éléments de G tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Nous avons

(1)	$\varphi(x) \circ [\varphi(y)]^{-1} = e_{G'}$	
(2)	$\Rightarrow \varphi(x) \circ \varphi(y^{-1}) = e_{G'}$	(par Th
(3)	$\Rightarrow \varphi(x * y^{-1}) = e_{G'}$	
(4)	$\Rightarrow x * y^{-1} \in \ker\varphi$	
(5)	$\Rightarrow x * y^{-1} = e_G$	(car $\ker\varphi = \{e_G\}$)
(6)	$\Rightarrow x = y$	

L'hypothèse $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique donc $x = y$ et φ est bien injective.

Barème : 4 points. Ne pas espérer une rédaction parfaite.

2. (3 PTS)

Soient $(G,*)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Nous définissons la relation R_H sur G par $x \,\mathsf{R}_H\, y \overset{def}{\iff} x^{-1} * y \in H$. Démontrer le théorème suivant :

Théorème. *La relation* R_H *est une relation d'équivalence sur* G*.*

Réponse :

Soit $x \in G$. $x \,\mathsf{R}_H\, x$ signifie $x^{-1} * x \in H$ or $x^{-1} * x = e_G$ et $e_G \in H$ car $H \leq G$. Cela montre que R_H est réflexive. Ensuite

$$x \,\mathsf{R}_H\, y \iff x^{-1} * y \in H \tag{7}$$

$$\implies (x^{-1} * y)^{-1} \in H \qquad (H \text{ sous-groupe}) \tag{8}$$

$$\implies y^{-1} * (x^{-1})^{-1} \in H \tag{9}$$

$$\implies y^{-1} * x \in H \tag{10}$$

$$\implies y \,\mathsf{R}_H\, x \tag{11}$$

ce qui montre que R_H est symétrique.
Enfin

$$\left.\begin{array}{r} x \,\mathsf{R}_H\, y \\ y \,\mathsf{R}_H\, z \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} x^{-1} * y \in H \\ y^{-1} * z \in H \end{array}\right\} \tag{12}$$

$$\implies (x^{-1} * y) * (y^{-1} * z) \in H \tag{13}$$

$$\implies x^{-1} * (y * y^{-1}) * z \in H \tag{14}$$

$$\implies x^{-1} * e_G * z \in H \tag{15}$$

$$\implies x^{-1} * z \in H \tag{16}$$

$$\implies x \,\mathsf{R}_H\, z \tag{17}$$

donc R_H est transitive et cela achève la preuve qu'elle est une relation d'équivalence.

Barème : 3 points. Ne pas espérer une rédaction parfaite.

On considère le groupe diédral D_4. On rappelle que

$$D_4 = \{I, r, r^2, r^3, s, s \circ r, s \circ r^2, s \circ r^3\},$$

où I est l'identité, r est la rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/2$ et s est la réflexion d'axe la droite des abcisses dans le plan affine euclidien. Tous les calculs dans le groupe $(D_4,\circ)$ peuvent être effectués à l'aide des relations

$$r^4 = I, \quad s^2 = I, \quad s \circ r = r^3 \circ s,$$

mais il est aussi possible d'éffectuer les calculs à l'aide de raisonnements géométriques.

3. (2 PTS)

Déterminer l'ordre de tous les éléments de D_4.

Réponse :

ordre 1 : l'élément neutre (I),
ordre 2 : Toutes les symétries orthogonales $s, s \circ r, s \circ r^2, s \circ r^3$ et aussi r^2 car $r^2 \neq I$ et $(r^2)^2 = r^4 = I$.
ordre 4 : r et aussi r^3 car $(r^3)^2 = r^6 = r^2 \neq I$, $(r^3)^3 = r^9 = r \neq I$ et $(r^3)^4 = r^{12} = I$.

Barème : 2 si les réponses sont correctes sans justification et 3 points s'il y a des justifications. 0.5 point en moins par erreur.

4. (3 PTS)

Déterminer l'ensemble des $x \in D_4$ satisfaisant l'équation $x \circ r = r^3 \circ x$ et en déduire les solutions de l'équation $x \circ r^3 = r \circ x$.

Réponse :

Nous étudions la première équation. Remarquons d'abord qu'il n'y a pas de solution parmi les rotations. En effet, $r^i \circ r = r^3 \circ r^i \iff r = r^3$ ce qui est impossible. Par contre, $x = s \circ r$, $i = 0,1,2,3$ est solution. En effet, $x = s \circ r^i \implies x \circ r = s \circ r^{i+1}$ et $r^3 \circ x = r^3 \circ s \circ r^i = s \circ r \circ r^i = s \circ r^{i+1}$. Pour ce qui concerne la deuxième équation, le même argument montre qu'aucune rotation n'est solution, il suffit alors de considérer le cas où il s'est est une symétrie et dans ce cas, puisque $x = x^{-1}$, $x \circ r^3 = r \circ x \iff x \circ r^3 \circ x = r \iff r^3 \circ x = x \circ r$ si bien que l'on retombe sur la première équation et nous pouvons conclure que tous les $s \circ r^i$ sont aussi solutions de cette deuxième équation.

Barème : 3 points : 2 pour la première équation et 1 pour la seconde équation. Noter en proportion en cas de réponse incomplète.

5. (2 PTS)

Montrer que si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux automorphismes de D_4 tels que $\phi_1(r) = \phi_2(r)$ et $\phi_1(s) = \phi_2(s)$ alors $\phi_1 = \phi_2$.

Réponse :

Nous devons montrer que pour tout $g \in D_4$, on a $\phi_1(g) = \phi_2(g)$. or, $g = r^i$ ou $g = s \circ r^i$. Dans le premier cas,
$\phi_1(g) = \phi_1(r^i) = \phi_1(r)^i = \phi_2(r)^i = \phi_2(r^i) = \phi_2(g)$ et, dans le second,
$\phi_1(g) = \phi_1(s \circ r^i) = \phi_1(s) \circ \phi_1(r)^i = \phi_2(s) \circ \phi_2(r)^i = \phi_2(g)$. Remarquons que chacune des inégalités est justifiée soit par le fait que ϕ_1 et ϕ_2 sont des morphismes, soit par le fait que $\phi_1(r) = \phi_2(r)$ et $\phi_1(s) = \phi_2(s)$.

Barème : 2 points.

6. (1 PT)

Montrer que si ϕ est un automorphisme de D_4 alors pour tout $x \in D_4$, $o(\phi(x)) = o(x)$ où $o(g)$ désigne l'ordre de l'élément g.

Réponse :

Cela découle immédiatement du fait que ϕ est un automorphisme car il implique $(\phi(x))^k = I \iff \phi(x^k) = I \iff x^k = I$.

Barème : 1 point.

7. (2,5 PTS)

Soit ϕ un automorphisme de D_4, montrer que $\phi(s) \circ \phi(r) = \phi(r)^3 \circ \phi(s)$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\phi(r)$, pour $\phi(s)$.

Réponse :

D'abord on a $\phi(s) \circ \phi(r) = \phi(s \circ r) = \phi(r^3 \circ s) = \phi(r)^3 \circ \phi(s)$. La première est la dernière égalité utilisent le fait que ϕ est un morphisme tandis que la seconde égalité utilise la relation entre s et r. Ensuite d'après la question précédente nous savons que puisque r est d'ordre 4 et s est d'ordre 2 il doit en être de même de leurs images par ϕ, $\phi(r)$ et $\phi(s)$. Il suit que $\phi(r) = r$ ou $\phi(r) = r^3$ et $\phi(s) = r^2$ ou s ou $s \circ r$ ou $s \circ r^2$ ou $\phi(s) = s \circ r^3$. [La possibilité $\phi(s) = r^2$ est à exclure parce que elle implique que $\phi(g)$ est une rotation pour tout $g \in D_4$ ce qui contredit le fait que c'est un automorphisme.]

Barème : 0,5 pour $\phi(s) \circ \phi(r) = \phi(r)^3 \circ \phi(s)$. 2 points pour avoir trouvé les conditions sur les ordres, 1 point de bonus pour avoir écarté la possibilité $\phi(s) = r^2$, 1 point de bonus supplémentaire pour avoir étudié la compatibilité des valeurs proposées avec la relation $\phi(s) \circ \phi(r) = \phi(r)^3 \circ \phi(s)$.

8. (4 PTS)

Déterminer tous les automorphismes de D_4.

Réponse :

Considérons les 8 applications de D_4 dans D_4 définies pour $i = 0,1,2,3$

$$\Phi_i(r^j) = r^j, \quad \Phi_i(s \circ r^j) = s \circ r^{i+j};$$
$$\Psi_i(r^j) = r^{3j}, \quad \Psi_i(s \circ r^j) = s \circ r^{i+3j}.$$

D'après la question précédente il ne peut pas y avoir d'autre automorphisme que ceux-là (ils épuisent les huit possibilités trouvées à la question précédente). Vérifions par exemple que Φ_1 est un automorphisme. Les autres vérifications seraient similaires. Nous devons montrer que pour tous $x,y \in D_4$, nous avons $\Phi_1(x \circ y) = \Phi_1(x) \circ \Phi_1(y)$. Nous étudions séparément selon que x et y sont des rotations ou des symétries. Les calculs font systématiquement appel au fait que les $s \circ r^i$ sont solutions des équations de la question 4.

(1) $\Phi_1(r^\alpha \circ r^\beta) = r^{\alpha+\beta} = r^\alpha \circ r^\beta = \Phi_1(r^\alpha) \circ \Phi_1(r^\beta)$.

(2) $\Phi_1(r^\alpha \circ (s \circ r^\beta)) = \Phi_1(s \circ r^{4-\alpha} \circ r^\beta) = s \circ r^{4-\alpha+\beta+i} = r^\alpha \circ s \circ r^{\beta+i} = \Phi_1(r^\alpha) \circ \Phi_1(s \circ r^\beta)$.

(3) $\Phi_1((s \circ r^\beta) \circ r^\alpha) = \Phi_1(s \circ r^{\alpha+\beta}) = s \circ r^{\alpha+\beta+i} = s \circ r^{\alpha+i} \circ r^\beta = \Phi_1(s \circ r^\beta) \circ \Phi_1(r^\beta)$.

(4) $\Phi_1((s \circ r^\alpha) \circ (s \circ r^\beta)) = \Phi_1(r^{4-\alpha+\beta}) = r^{4-(\alpha+i)+(\beta+i} = s \circ r^{\alpha+i} \circ s \circ r^{\beta+i} = \Phi_1(s \circ r^\alpha) \circ \Phi_1(s \circ r^\beta)$.

On peut remarquer que $\Phi_i = (\Phi_1)^i$, $i = 0,1,2,3$.

Barème : 1 point pour avoir remarqué qu'il y avait au plus eu huit automorphismes; 2 points pour avoir donné une définition 'acceptable' des huit automorphismes, 2 points pour avoir vérifié sur au moins un exemple différent de l'identité que la définition proposée était bien un automorphisme (même si tous les calculs ne sont pas faits : il faut évidement se satisfaire de "cela marche de la même manière" si l'étudiant est convaincant sur quelques calculs).