

Algèbre

L2 Mathématiques

Contrôle continu
29 février 2008

NOM :

PRENOM :

Numéro de la carte d'étudiant :

Numéro du groupe de TD :

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

NOTE :

1. (4 PTS)

Démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Pour qu'un morphisme soit injectif il faut et il suffit que son noyau se réduise à l'élément neutre.*

Réponse :

2. (3 PTS)

Soient $(G, *)$ un groupe et H un sous-groupe de G . Nous définissons la relation \mathcal{R}_H sur G par $x \mathcal{R}_H y \stackrel{\text{def}}{\iff} x^{-1} * y \in H$. Démontrer le théorème suivant :

Théorème. *La relation \mathcal{R}_H est une relation d'équivalence sur G .*

Réponse :

On considère le groupe diédral D_4 . On rappelle que

$$D_4 = \{I, r, r^2, r^3, s, s \circ r, s \circ r^2, s \circ r^3\},$$

où I est l'identité, r est la rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/2$ et s est la réflexion d'axe la droite des abscisses dans le plan affine euclidien. Tous les calculs dans le groupe (D_4, \circ) peuvent être effectués à l'aide des relations

$$r^4 = I, \quad s^2 = I, \quad s \circ r = r^3 \circ s,$$

mais il est aussi possible d'effectuer les calculs à l'aide de raisonnements géométriques.

3. (2 PTS)

Déterminer l'ordre de tous les éléments de D_4 .

Réponse :

4. (3 PTS)

Déterminer l'ensemble des $x \in D_4$ satisfaisant l'équation $x \circ r = r^3 \circ x$ et en déduire les solutions de l'équation $x \circ r^3 = r \circ x$.

Réponse :

5. (2 PTS)

Montrer que si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux automorphismes de D_4 tels que $\phi_1(r) = \phi_2(r)$ et $\phi_1(s) = \phi_2(s)$ alors $\phi_1 = \phi_2$.

Réponse :

6. (1 PT)

Montrer que si ϕ est un automorphisme de D_4 alors pour tout $x \in D_4$, $o(\phi(x)) = o(x)$ où $o(g)$ désigne l'ordre de l'élément g .

Réponse :

7. (2,5 PTS)

Soit ϕ un automorphisme de D_4 , montrer que $\phi(s) \circ \phi(r) = \phi(r)^3 \circ \phi(s)$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\phi(r)$, pour $\phi(s)$.

Réponse :

8. (4 PTS)

Déterminer tous les automorphismes de D_4 .*Réponse :*