ALGEBRE[1]

Contrôle terminal de vendredi 9 juin 2006

Indications de correction

1

Dans cette partie on considère le groupe $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}),\cdot)$ formé de l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients complexes que l'on munit de la multiplication habituelle des matrices. On rappelle que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on definit $\overline{M}$ par $\overline{M} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$ (on prend les conjugués de tous les coefficients) et la *transposée* $T(M)$ par $T(M) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ (on permute les éléments b et c de M).

1.1. Commençons par montrer que $\mathcal{C}$ est un morphisme. Pour $M,N \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ on doit montrer que $\mathcal{C}(MN) = \mathcal{MN}$ ou encore $\overline{MM'} = \overline{M}\,\overline{M'}$. Posons

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

On a

$$\overline{MM'} = \overline{\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+dc' & b'c+dd' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{aa'+bc'} & \overline{ab'+bd'} \\ \overline{a'c+dc'} & \overline{b'c+dd'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}\bar{a'}+\bar{b}\bar{c'} & \bar{a}\bar{b'}+\bar{b}\bar{d'} \\ \bar{a'}\bar{c}+\bar{d}\bar{c'} & \bar{b'}\bar{c}+\bar{d}\bar{d'} \end{pmatrix} = \overline{M}\,\overline{M'}.$$

Pour la trosième égalité on utilise les propriétés du conjugué dans $\mathbb{C}$. La propriété $\mathcal{C} \circ \mathcal{C} = Id$ qui se vérifie immédiatement (à l'aide de $\bar{\bar{u}} = u$ pour $u \in \mathbb{C}$) suffit à montrer que $\mathcal{C}$ est une bijection (et donc un automorphisme) et $\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}$. (On pouvait évidemment procéder autrement, en montrant d'abord injectif puis surjectif avec les méthodes habituelles.)

1.2. La vérification $T(A \cdot B) = T(B) \cdot T(A)$ est un calcul immédiat. L'application $T : M \mapsto T(M)$ n'est pas un morphisme puisque $T(B) \cdot T(A)$ n'est pas en général égal à $T(A) \cdot T(B)$ et la condition requise pour morphisme est $T(A \cdot B) = T(A) \cdot T(B)$. Comme précédemment, le relation (facile à établir) $T \circ T = Id$ montre que T est une bijection. Enfin $I = T(I) = T(A \cdot A^{-1}) = T(A^{-1})T(A)$ entraîne $T(A^{-1}) = (T(A))^{-1}$.

2

2.1. Soit G l'ensemble des matrices inversibles M de déterminant égal à 1 et de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ où α et β sont des nombres complexes, autrement dit

$$G \overset{def}{=} \left\{ M \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}) \,:\, M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \alpha,\beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

D'abord G est un sous-ensemble de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ non vide ($I \in G$). On doit donc établir que pour M et M' dans G on a $MM' \in G$ et $M^{-1} \in G$. Pour vérifier l'appartenance à G on doit vérifier eux propriétés : le déterminant est égal à 1 et les coefficients ont la forme voulue. La condition sur le déterminant est

---

1. Licence de mathématiques (2-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III)*. Année scolaire 2005-2006

obtenue grâce à la relation $\det(AB) = \det A \det B$. Voyons la condition sur la forme. Soient M et M' dans G. On a

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ \bar{b'} & \bar{a'} \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a'} & -b' \\ -\bar{b'} & a' \end{pmatrix} \text{ (car } \det M' = 1).$$

On a alors

$$MM'^{-1} = \begin{pmatrix} a\bar{a'} - b\bar{b'} & -ab' + ba' \\ \bar{b'}\bar{a'} - \bar{a}\bar{b'} & -\bar{b'}\bar{b} + \bar{a}a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \triangle \\ \bar{\triangle} & \bar{\square} \end{pmatrix}$$

avec $\square = a\bar{a'} - b\bar{b'}$ et $\triangle = -ab' + ba'$ donc MM'^{-1} est bien un élemnt de G qui est donc un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}),\cdot)$.

2.2. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose

$$G' \stackrel{def}{=} \left\{ M \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}) \,:\, \det(M) = 1 \text{ et } T(\overline{M}) \cdot S \cdot M = S \right\}.$$

Là encore le fait que G' est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ et la condition sur le déterminant sont immédiatement vérifiés. Soient M et M' dans G'. On a

$$\begin{aligned} T(\overline{MM'})SMM' &= T(\overline{M}\,\overline{M'})SMM' \\ &= T(\overline{M'})\,T(\overline{M})SMM' \\ &= T(\overline{M'})\,(T(\overline{M})SM)M' \\ &= T(\overline{M'})SM' = S \end{aligned}$$

où la première égalité utilise $\mathcal{C}$ morphisme, la seconde la propriété démontrée de T, la troisième l'associativité, la quatrième le fait que $M \in G'$ et la cinquième le fait que $M' \in G'$.
Il reste à établir que si $M \in G'$ alors $M^{-1} \in G'$. Partant de $M \in G'$ on a en

$$\begin{aligned} & T(\overline{M})SM = S & \\ \Longleftrightarrow \quad & SM = (T(\overline{M}))^{-1}S & \text{(mult. par } (T(\overline{M}))^{-1}) \\ \Longleftrightarrow \quad & SM = T(\overline{M^{-1}})S & \text{(propriétés de } T \text{ et de } \mathcal{C}) \\ \Longleftrightarrow \quad & S = T(\overline{M^{-1}})SM^{-1} & \text{(mult. par } M^{-1}) \end{aligned}$$

et la dernière formule montre que $M^{-1} \in G'$.

2.3. On se propose de démontrer que $G = G'$

(1) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in G$. En calculant $T(\overline{M})SM$ on trouve $\begin{pmatrix} a\bar{a} - b\bar{b} & 0 \\ 0 & b\bar{b} - a\bar{a} \end{pmatrix}$ qui n'est autre que S puisque $M \in G$ entraîne $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. Cela montre que G est inclus dans G'.

(2) On suppose que a,b,c et d sont des nombres complexes vérifiant les équations

$$\begin{cases} ad - bc = 1 \\ a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \\ b\bar{b} - d\bar{d} = -1 \\ b\bar{a} - d\bar{c} = 0 \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par b on trouve $ba\bar{a} - bc\bar{c} = b$ or la quatrième équation donne $b\bar{a} = d\bar{c}$ d'où, en reportant dans l'équation précédente $a(d\bar{c}) - bc\bar{c} = b$ soit $(ad - bc)\bar{c} = b$ qui donne $\bar{c} = b$ ou $c = \bar{b}$ puisque $ad - bc = 1$. Reportant ce résulat dans la quatrième équation on obtient $0 = b\bar{a} - d\bar{c} = b\bar{a} - db$ ce qui implique $\bar{a} = d$ à condition que b soit non nul. Mias si b est nul alors d ou c est égal à 0. La troisième équation rend l'hypothèse $d = 0$ impossible. maintenant si $c = 0$ alors $ad = 1$ et $a\bar{a} = 1$ donne encore $\bar{a} = d$.

(3) Montrer que $G' \subset G$. Posant $M = (\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})$, on vérifie par un calcul que $M \in G'$ si les coefficients a,b,c,d vérifient le système précédent. Attention l'égalité $T(\overline{M})SM = S$ ne donne que 3 équations car deux des coefficients donnent la même relation. La quatrième relation est obtenue en tenant compte du fait que $\det M = 1$ satisfaite par tout élément de G'. Les relations sur les coefficients obtenues dans la question précédente montre ensuite directement que $M \in G$.

3

On note $(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}),\cdot)$ l'ensemble des matrices à coefficients réels dont le déterminant est égal à 1. *C'est un sous-groupe du groupe* $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}),\cdot)$ *- et donc aussi de* $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}),\cdot)$ *- formé de l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels.* Ce résultat est admis, on ne demande pas de le démontrer.

3.1. Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(1) $\Delta^{-1} = T(\overline{\Delta})$ et $T(\overline{\Delta^{-1}}) = \Delta$: c'est un très élémentaire calcul matriciel utilisant la formula pour l'inverse d'une matrice rappelée dans l'introduction.

(2) On considère l'application

$$\Phi : M \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}) \mapsto \Phi(M) = (\Delta \cdot M \cdot \Delta^{-1}) \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Montrer que Φ est un automorphisme et déterminer Φ^{-1}. Soient $M,M' \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, on a en utilisant $\Delta^{-1} \cdot \Delta = I$,

$$\begin{aligned}
\Phi(MM') &= \Delta \cdot MM' \cdot \Delta^{-1} \\
&= \Delta \cdot M \cdot (\Delta^{-1} \cdot \Delta)M' \cdot \Delta^{-1} \\
&= (\Delta \cdot M) \cdot (\Delta^{-1} \cdot \Delta M' \cdot \Delta^{-1}) \\
&= \Phi(M) \cdot \Phi(M').
\end{aligned}$$

Cette relation que Φ est un morphisme. Posant $\tau(M) = \Delta^{-1} \cdot M \cdot \Delta$, on vérifie immédiatement que $\Phi \circ tau = \tau \circ \Phi$ cela montre que Φ est une bijection de bijection réciproque τ.

(3) En utilisant les propriétés du déterminant, $\det \Phi(M) = \det \Delta \det M \det(\Delta^{-1}) = \det M$ puisque $\det \Delta \det(\Delta^{-1}) = 1$.

(4) On a

$$\begin{aligned}
T(\overline{\Phi(M)}) &= T(\overline{\Delta M \Delta^{-1}}) \\
&= T(\overline{\Delta} \cdot \overline{M} \cdot \overline{\Delta}^{-1}) \\
&= T(\overline{\Delta}^{-1}) \cdot T(\overline{M}) \cdot T(\overline{\Delta}) \\
&= \Delta \cdot T(\overline{M}) \cdot \Delta^{-1} \\
&= \Phi(T(\overline{M})).
\end{aligned}$$

La première égalité utilise la définition de Φ, la seconde les propriétés de $\mathcal{C}$, la troisième celle de T, la quatrième les calculs sur Δ, la dernière la définition de Φ.

FIN