

# ALGÈBRE<sup>1</sup>

Contrôle terminal de vendredi 9 juin 2006

durée : 2 heures

---

Nota bene. On peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes. Le barème (approximatif) est 1 : 4 pts, 2 : 11 pts et 3 : 6 pts (pour un total de 21 pts). *La partie 3.2 est hors barème.* Les notes de cours ainsi que le résumé polycopié du cours sont autorisés. L'usage de tout autre document est interdit. *Une réponse exacte sans justification ou avec une justification fautive ne rapportera aucun point.* On pourra librement utiliser les propriétés connues des nombres complexes, notamment du module et du conjugué, comme par exemple  $\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}$ ,  $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}$  ou  $|uv| = |u||v|$ .

---

1

Dans cette partie on considère le groupe  $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$  formé de l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  inversibles à coefficients **complexes** que l'on munit de la multiplication habituelle des matrices. On rappelle que si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$  alors  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  on définit  $\overline{M}$  par  $\overline{M} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$  (on prend les conjugués de tous les coefficients) et la *transposée*  $T(M)$  par  $T(M) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  (on permute les éléments  $b$  et  $c$  de  $M$ ).

1.1. Montrer que l'application  $\mathcal{C}$  qui à  $M$  fait correspondre  $\overline{M}$  est un automorphisme de  $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ . Déterminer  $\mathcal{C}^{-1}$ .

1.2. Montrer que pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$  on a  $T(A \cdot B) = T(B) \cdot T(A)$ . L'application  $T : M \mapsto T(M)$  est-elle un morphisme de  $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$  dans lui-même. Montrer que  $T$  est une bijection. Montrer que  $T(A^{-1}) = (T(A))^{-1}$ .

2

2.1. Soit  $G$  l'ensemble des matrices **inversibles**  $M$  de déterminant égal à 1 et de la forme  $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres **complexes**, autrement dit

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}) : M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ .

2.2. Soit  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . On pose

$$G' \stackrel{\text{def}}{=} \{ M \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}) : \det(M) = 1 \text{ et } T(\overline{M}) \cdot S \cdot M = S \}.$$

Montrer que  $G'$  est un sous-groupe de  $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ .

---

1. Licence de mathématiques (2-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III)*. Année scolaire 2005-2006

2.3. On se propose de démontrer que  $G = G'$

- (1) Montrer que  $G \subset G'$ .
- (2) On suppose que  $a, b, c$  et  $d$  sont des nombres complexes vérifiant les équations

$$\begin{cases} ad - bc = 1 \\ a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \\ b\bar{b} - d\bar{d} = -1 \\ b\bar{a} - d\bar{c} = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $d = \bar{a}$  et  $c = \bar{b}$ . (Indication. On pourra par exemple multiplier la seconde équation par  $b$  puis utiliser la quatrième équation en tenant compte de la première.)

- (3) Montrer que  $G' \subset G$ . (Indication. Posant  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on cherchera à résoudre l'équation  $T(\overline{M}) \cdot S \cdot M = S$  d'inconnues  $a, b, c$  et  $d$ .)

## 3

On note  $(\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}), \cdot)$  l'ensemble des matrices à coefficients **réels** dont le déterminant est égal à 1. *C'est un sous-groupe du groupe  $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$  – et donc aussi de  $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$  – formé de l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  inversibles à coefficients réels.* Ce résultat est admis, on ne demande pas de le démontrer.

3.1. Soit  $\Delta = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

- (1) Montrer que  $\Delta^{-1} = T(\overline{\Delta})$  et  $T(\overline{\Delta^{-1}}) = \Delta$ .
- (2) On considère l'application  $\Phi$  définie sur  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$  par

$$\Phi : M \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}) \mapsto \Phi(M) = (\Delta \cdot M \cdot \Delta^{-1}) \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Montrer que  $\Phi$  est un automorphisme et déterminer  $\Phi^{-1}$ .

- (3) Que peut-on dire du déterminant de  $\Phi(M)$ ?
- (4) Montrer que  $T(\overline{\Phi(M)}) = \Phi(T(\overline{M}))$ .

## HORS BARÈME

3.2. Dans cette partie, on se propose de montrer que  $G = \Phi(\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}))$ .

- (1) Montrer que si  $A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  alors  $\Phi(A) \in G$ , autrement dit,  $\Phi(\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})) \subset G$ . [2pts]
- (2) Soit  $g \in G$ . On note  $A$  l'antécédent de  $g$  par  $\Phi$  autrement dit  $\Phi(A) = g$ . On veut montrer que  $A \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ . Posons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .
  - (a) Montrer que  $\det A = 1$ . [0,5 pts]
  - (b) Montrer, en partant de la relation  $T(\overline{g}) \cdot S \cdot g = S$  que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot T(\overline{A}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

[3 pts]

- (c) Dédire de la question précédente que  $A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ . [2 pts]