ALGEBRE[1]

Examen du 19 juin 2004

durée : 2 heures

Nota bene. *Le barême (approximatif) est I : 3 pts, II : 6 pts et III (A,B,C,D) : 11 pts. La dernière partie (E) du III sera notée "hors barême". L'exercice I est indépendant. Il pourra être utile d'utiliser les résultats de l'exercice II dans l'exercice III. Les notes de cours sont autorisées. L'usage de tout autre document est interdit.* Une réponse exacte sans justification ou avec une justification fausse ne rapportera aucun point. *Il sera fortement tenu compte de la clarté de la rédaction.*

I. Dans l'anneau de polynômes $(\frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}[X], +, \cdot)$ on considère le polynôme P défini par

$$P = \overline{1}\, X^{11} + \overline{10}\, X + \overline{1}.$$

Montrer que P n'a aucune racine. (On pourra utiliser le petit théorème de Fermat dans $\frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$ qui dit que $a^{10} = \overline{1}$ pour tout $a \in \frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}/\{\overline{0}\}$.)

II. Soit $w \in \mathbb{R}^{*+} =]0,\infty[$. On définit

$$\begin{aligned} \Omega &\stackrel{\text{def}}{=} \{\pm w^n, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{1, w, w^{-1}, w^2, w^{-2}, \dots\} \cup \{-1, -w, -w^{-1}, -w^2, -w^{-2}, \dots\} \end{aligned}$$

A – Montrer que Ω est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, le groupe des nombres réels non nuls muni de la multiplication habituelle.

`Ajouté en cours d'épreuve : à partir de maintenant on suppose en outre` $w \neq 1$.

B – Déterminer deux éléments a et b tels que $\Omega = \langle a, b \rangle$.

C – Trouver un isomorphisme $f : \{-1,1\} \times \mathbb{Z} \to \Omega$ où $\{-1,1\}$ est muni de la *multiplication* et $\mathbb{Z}$ de l'*addition*.

(On rappelle que si G_1 est muni de la loi $*_1$ et G_2 de la loi $*_2$ alors la loi $*$ du groupe $G_1 \times G_2$ est définie par

$$(g_1, g_2) * (g_1', g_2') = (g_1 *_1 g_1', g_2 *_2 g_2').)$$

En déduire que

$$\Omega \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$$

où $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ est muni de l'*addition*.

III. Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble de nombres réels défini par

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

A – Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

B – Montrer que le corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ qui contienne $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

---

1. Licence de mathématiques (2-ième année), *Université Paul Sabatier (Toulouse III).* Année scolaire 2003-2004

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ formé des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. On rappelle que $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $\alpha \cdot \beta = 1$.

C – On considère l'application $N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}$ définie par

$$\begin{aligned} N(a+b\sqrt{2}) &\overset{\text{def}}{=} (a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) \\ &= a^2 - 2b^2 \end{aligned}$$

(1) Montrer que quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(\alpha.\beta) = N(\alpha).N(\beta)$.
(2) Montrer que si $\alpha \in (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^*$ alors $N(\alpha) \in \{-1, +1\}$.
(3) Montrer réciproquement que si $\alpha = a + b\sqrt{2}$ vérifie $N(\alpha) = \pm 1$ alors α est inversible et donner son inverse en fonction de a et b.

D – On pose $w = 1 + \sqrt{2}$ et $\Omega = \{\pm w^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\Omega \subset (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^*$.

E – Dans cette partie on veut établir que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^* \subset \Omega$ (ce qui impliquera, d'après le résultat de la question précédente, que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^* = \Omega$). Nous supposerons le contraire, à savoir :

(H) *Il existe $\epsilon \in (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^*$ tel que $\epsilon \notin \Omega$.*

et montrerons que cette hypothèse conduit à une contradiction.

(1) Montrer que $|\epsilon| \in (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^*$ et $|\epsilon| \notin \Omega$ où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue.
(2) On note $\epsilon' = |\epsilon|$ si $|\epsilon| > 1$ et $\epsilon' = \frac{1}{|\epsilon|}$ si $|\epsilon| < 1$. Montrer que $\epsilon' \in (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^*$ mais $\epsilon' \notin \Omega$, puis qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $w^s < \epsilon' < w^{s+1}$.
(3) On pose $\epsilon'' = \epsilon' w^{-s}$. Montrer que $1 < \epsilon'' < w$ et $\epsilon'' \in (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^*$ (de sorte que, conformément à C – (2), $N(\epsilon'') = \pm 1$).
(4) Montrer que les conditions $1 < \epsilon'' < w$ et $N(\epsilon'') = \pm 1$ conduisent à une contradiction.

FIN